ELEMENTOS PARA UNA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE DERIVADA.

"LA DERIVADA DE CARATHÉODORY"

ELÍAS CARDONA VELÁZQUEZ

Código: 200608199

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2015

ELEMENTOS PARA UNA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE DERIVADA.

"LA DERIVADA DE CARATHÉODORY"

ELÍAS CARDONA VELÁSQUEZ

Código: 200608199

Informe final de investigación, como requisito para optar por el título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática

DIRECTOR

César A. Delgado García, Ph.D.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2015

Nota de aceptación:

____

____

____

____

____

Firma del presidente

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Santiago de Cali, Mayo de 2015.

A Dios por acompañarme en cada uno de mis pasos y darme fortaleza

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos al profesor César Delgado, por asumir el gran desafío de enseñarme la Educación Matemática y dedicar tantas horas de su tiempo a revisar y orientar este trabajo y sobre todo por la paciencia.

CONTENIDO

ELEMENTOS PARA UNA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE DERIVADA.

"LA DERIVADA DE CARATHÉODORY"

Una versión falsa del cálculo basada en el teorema de límite de Cauchy es enseñada actualmente en las escuelas. Para reactivar el ingenio en las ciencias físicas los estudiantes deben aprender el avance creativo real consagrado en el descubrimiento del cálculo realizado por Leibniz

Ernest Schapiro

RESUMEN

Este trabajo se inscribe en la línea de investigación «*Formación matemática en contextos curriculares y pensamiento matemático avanzado*», de la maestría en Educación énfasis en *Educación Matemática* del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y se refiere a la *transposición didáctica* de los conceptos fundamentales del cálculo y la problemática que plantea la prevalencia de la comprensión algorítmica o instrumental sobre la comprensión conceptual. Se relaciona con investigaciones ya realizadas como las de Delgado (1998), Campaña (2009), Álvarez (2011) y tiene como objetivo central aportar elementos para caracterizar una transposición didáctica asociada al concepto de derivada utilizando la definición de Carathéodory que se fundamenta en el concepto de continuidad sin recurrir al paso al límite. Se considera que, si bien la construcción del concepto de continuidad ε-δ, en un primer curso de cálculo del nivel universitario, implica la superación de múltiples obstáculos cognitivos (ver Delgado, 1998), ella es necesaria para fundamentar los conceptos del cálculo y de esta manera acceder al concepto de derivada,

propiciando la superación de la comprensión típicamente algorítmica que ha venido caracterizando el aprendizaje de este concepto entre estudiantes universitarios.

El marco teórico, *constructivista radical*, define el campo conceptual para examinar una posible transposición didáctica de los conceptos fundamentales del cálculo, centrados en el concepto de continuidad y la derivada de Carathéodory apoyándose en la epistemología genética de Jean Piaget, el concepto de obstáculo cognitivo –de origen epistemológico, ontológico, didáctico o sociocultural– transpuesto de la epistemología a la didáctica por Guy Brousseau (1983, 1989) y la teoría sobre estructuras teórico conceptuales.

Como resultados principales de este proyecto se caracteriza una Estructura Teórico Conceptual (ETC), asociada con el concepto de derivada utilizando la definición de Constantin Carathéodory. (1954) y principalmente se muestra la potencialidad de esta definición en la flexibilidad del currículo.

Palabras clave: derivada, continuidad, esquema, transposición didáctica, obstáculo epistemológico y estructura teórico conceptual.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación, se inscribe en el marco de la línea de investigación «*formación matemática en contextos curriculares y pensamiento matemático avanzado*», de la maestría en Educación énfasis en Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, está relacionado con aquellos estudios que abordan la problemática referida a la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos básicos, en especial del cálculo diferencial e integral.

En este informe de investigación se identifican los conceptos y su funcionamiento en la organización y demostración de los teoremas que permiten proponer una *transposición didáctica* (**TD**) de éstos conceptos para la enseñanza de la derivada en torno a la definición de Carathéodory, para mejorar los niveles de compresión entorno al concepto de derivada.

La importancia y el mayor interés por realizar este proyecto, tienen que ver con el mejoramiento de los bajos niveles de comprensión que se están evidenciando en los cursos de cálculo y proponer una estrategia para dejar de lado lo meramente algorítmico e instrumental y mejorar los índices de comprensión conceptual.

El soporte teórico de este trabajo tiene como referente las investigaciones que ponen en evidencia los múltiples factores que definen este funcionamiento no deseado del sistema didáctico entre los cuales se cuenta, por ejemplo, la naturaleza de los objetos matemáticos y la comprensión que alcanzan los estudiantes como en el caso de las funciones Sierpinska, obstáculos y actos de comprensión del concepto de función (1992); obstáculos epistemológicos relativos al concepto de Límite (1985). Los procesos de abstracción y constitución de los objetos matemáticos Dubinsky (1992); Sfard (1992). Estudio sobre la microgénesis de los conceptos de continuidad y límite Delgado (1998). Los sistemas de representación y la actividad matemática Tall (2001); Los sistemas de representación y la constitución de los objetos matemáticos Duval (1999). El papel de las concepciones epistemológicas y didácticas en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del cálculo

Artigue (1995, 1999); Obstáculos epistemológicos asociados a los conceptos fundamentales del cálculo Cantoral (1988), Dolores (1989); La mediación de la tecnología en la construcción de esquemas conceptuales Tall y Giraldo (2002); Concepciones de los profesores y la derivada Badillo (2003), entre otros.

Este trabajo tiene seis capítulos que se presentan brevemente a continyación.

En el capítulo uno, se presentan investigaciones relacionadas con la problemática de la transposición didáctica de los conceptos fundamentales del cálculo y, en particular, del concepto de derivada.

En el capítulo dos, se exponen las teorías y conceptos que fundamentan la elección de unidades de análisis, La primera teoría identifica los conceptos básicos respecto a la manera como concibe Toulmin (1972/1977) el cambio conceptual. Seguidamente se abordan los planteamientos del concepto de obstáculo epistemológico, después de formación matemática y las estructuras teórico conceptuales desarrolladas por los profesores Álvarez y Delgado y por último se toma como base la transposición del concepto de la derivada de Carathéodory desde la Epistemología Genética de Piaget, tomando como referente el estudio de la génesis de las *entidades conc*eptuales matemáticas que hace Delgado (1998).

El capítulo tres presenta el problema de investigación, los objetivos, la hipótesis y la metodología implementada para alcanzar los objetivos de la investigación. Nuestro problema se plantea en términos de las siguientes preguntas:

1.-¿Qué problemas y necesidades dan origen al concepto derivada? ¿Qué obstáculos epistemológicos emergen en su desarrollo histórico?

2.- ¿Cuál sería una estructura teórico conceptual que permitiera la organización de los problemas, técnicas, propiedades y demostraciones que conforman el concepto de derivada vía Carathéodory?

3.- ¿En qué medida la definición vía Carathéodory permite anticipar una mayor accesibilidad cognitiva a la derivada y qué problemas se pueden suscitar en el aprendizaje de este concepto por esta vía?.

Y el objetivo general de esta tesis es:

“Aportar elementos para caracterizar una transposición didáctica asociada a la derivada utilizando la definición de Carathéodory”.

El capítulo cuatro, contiene un breve análisis histórico y epistemológico del concepto de derivada cuyos resultados proporcionan algunos elementos para una transposición didáctica de la derivada. Entre los resultados que resaltamos en este estudio y específicamente en el primer periodo es que la geometría Euclidiana que dominó por muchos siglos las matemáticas era esencialmente estática y local; centrada en las propiedades de las figuras que se interpretaban como representaciones sugeridas por el mundo sensible, característica que se evidencia claramente en *Los Elementos* de Euclides, donde se observa el rigor de una demostración deductiva, pero donde las «transformaciones geométricas» no fueron consideradas.

En el capítulo quinto se desarrolla la caracterización de una estructura teórico conceptual, como fundamento matemático para una propuesta de enseñanza de la derivada basada en la definición de Carathéodory. Se define una estructura teórico conceptual matemática, como un conjunto estructurado de conceptos, problemas y procesos matemáticos, mediante la cual se caracteriza un saber matemático presente en un discurso matemático especifico, que puede tener o no fines de enseñanza.(Álvarez, 2009)

En el capítulo sexto, se presentan los resultados y conclusiones respecto a cada uno de los objetivos propuestos los cuales apuntan a presentar una *transposición didáctica alternativa* que estimule una *comprensión conceptual* – no meramente instrumental o algorítmica- de los conceptos fundamentales del cálculo y, a la vez más económica desde el punto de vista curricular. Una gran ventaja de la definición de la derivada vía Carathéodory, como se mostrara en el capítulo 4, aparece a la hora de obtener los resultados clásicos de las funciones derivables. Las demostraciones del algebra de las derivadas utilizando la definición de Cauchy son tediosas y rutinarias, con la definición de Carathéodory se simplifican los cálculos privilegiando la parte algebraica. (Delgado & Acosta (1994), demuestran que la definición de "*derivada de Carathéodory*" es equivalente a la definición de Frechet y este hecho permite introducir el concepto de derivada vía *Carathéodory* con lo que esta presentación evitaría el tránsito por varias definiciones: una para funciones de una variable real y luego, como paso obligado, construir otra definición para funciones escalares y otra para campos vectoriales.

Por último, se presentan las referencias bibliográficas que soportan este proyecto de investigación.

1 ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

1.1 Antecedentes

Esta investigación parte de una propuesta para el mejoramiento de la enseñanza del Cálculo, específicamente sobre el concepto de derivada, a nivel universitario respecto de las nociones matemáticas que el currículo señala como necesarias para la formación de ingenieros y científicos particularmente los estudiantes de la Pontificia Universidad Javeriana (PUJ) Cali.

Adicionalmente otra motivación que generó el desarrollo de este trabajo de investigación está asociada con las preocupaciones personal e institucional por la deficiente comprensión conceptual de los conceptos fundamentales del cálculo en los estudiantes matriculados en los planes de ingenierías en la PUJ. La enorme dificultad que enfrentan los profesores para mediar en la comprensión conceptual de sus estudiantes y las restricciones que presentan los estudiantes por los bajos niveles de su formación matemática, hacen que profesores y alumnos se refugien en los tratamientos algorítmicos minimizando, o dejando de lado, la comprensión conceptual. Este fenómeno didáctico[1] que lleva a privilegiar lo algorítmico en detrimento de lo conceptual no es exclusivo de la PUJ sino que es compartido por los sistemas universitarios a nivel mundial, en mayor o menor grado. Son muchas las

[1] *fenómeno didáctico*: se identifica con este nombre a los problemas que se plantea un investigador de la didáctica para *entender* y encontrar *buenas explicaciones* a los procesos que surgen en el *estudio* de las matemáticas y que se relaciona con las actividades de: utilizar matemáticas conocidas, aprender y enseñar matemáticas, y crear matemáticas nuevas. La formulación de un fenómeno didáctico parte de la constatación de un hecho que se repite y presenta un punto estable del sistema didáctico, pero que ante las necesidades actuales plantea una problemática que obstaculiza el funcionamiento del sistema didáctico con relación a los nuevos requerimientos del medio que se producen por diversas razones –adelantos técnicos, nuevas formulaciones de la ciencia, nuevas necesidades sociales, etc.

investigaciones que ponen en evidencia los múltiples factores que definen este funcionamiento no deseado del sistema didáctico entre los cuales se encuentran: Sierpinska (1992, 1985); Dubinsky (1992); Sfard (1992); Delgado (1998); Tall (2001); Duval (1999), Artigue (1995, 1999); Cantoral (1988); Dolores (1989); Tall y Giraldo (2002); Badillo (2003), entre otros.

El presente proyecto de investigación se sitúa en el marco de la línea de investigación que a nivel internacional se ha denominado “pensamiento matemático avanzado” en contraste con “pensamiento matemático elemental”. Esta distinción de términos es importante porque hace explícitas formas diferentes, pero relacionadas, de concebir los objetos matemáticos, operar con ellos y validar sus resultados. A causa de este reconocimiento, durante las últimas décadas se ha visto aparecer en el seno de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática la necesidad de considerar las diferentes características que asume la actividad matemática cuando, en el plano de la educación profesionalizante, se estudia o se enseña matemáticas frente a la actividad que se desarrolla en la escuela primaria y media, que tiene por objetivo una educación general que prepare al estudiante para la vida en sociedad.

En esta línea de ideas, los problemas que se abordan en el plano del pensamiento matemático avanzado son diversos y abarcan temas del cálculo, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, entre otros, en particular, una gran parte de las investigaciones gira en torno a aspectos cognitivos en relación con la comprensión de los conceptos base del cálculo: número real, función y límite, que son los que se relacionan directamente en este proyecto. Conviene señalar que el concepto de límite se ha considerado central en la constitución de los conceptos de continuidad, derivada e integral y por esta razón ha sido objeto de especial atención, como ya lo señalamos más arriba, y también porque pone en evidencia una ruptura entre los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías propias del álgebra y aquellas que se deben desarrollar para resolver problemas propios del cálculo.

Además de la gran cantidad de investigación realizada en torno al concepto de límite, otro concepto bastante estudiado ha sido el de la derivada. Las investigaciones sobre este tema muestran que la presentación tradicional de la derivada vía el límite del cociente de Newton da como resultado una comprensión conceptual muy pobre, como caso específico se puede citar la dificultad para comprender la covariación funcional y la razón de cambio Thompson (1994) y Azcárate & Camacho (2003). Entre otras investigaciones.

El avance en las investigaciones en torno a los conceptos del cálculo, proporciona una información que permite identificar las debilidades de la enseñanza actual de esta materia y algunas de las causas de las rupturas entre las actividades algebraicas y las del cálculo que dificultan un acceso más comprensivo y no sólo instrumental de conceptos como el de la derivada. En este proyecto se plantea la necesidad de estudiar el problema de las reconstrucciones que surgen como necesarias para alcanzar una comprensión conceptual, de las nociones fundamentales del cálculo y en particular de la derivada, que sea funcional en el sentido de potenciar la aplicación de la teoría matemática a la resolución de problemas complejos en el campo profesional en el que se desempeñará el estudiante.

1.2 Transposiciones didácticas del concepto de derivada.

El problema que se plantea en esta propuesta de investigación gira en torno a una crítica a la transposición didáctica actual del concepto de derivada y se propone investigar una propuesta alternativa: la derivada de Caratheodory.

La transposición didáctica del concepto de derivada que se utiliza modernamente y con mayor frecuencia en los textos universitarios, inicia generalmente con el concepto de límite, seguidamente se introduce el concepto de continuidad y por último se incorpora el concepto de derivada como un límite, desarrollando en este tema sus diferentes técnicas algebraicas y sus reglas, hasta llegar a los problemas de modelación y aplicación como son los problemas de variación de tazas relacionadas y optimización. La actual transposición didáctica toma el concepto de límite como transversal y fundamental y el concepto de continuidad ocupa un lugar secundario. Sin embargo, históricamente no siempre predominó esta visión y fue cierta idea de *continuidad* y la manipulación de *cantidades infinitesimales* lo que plantearía la ruptura que daría origen a la invención del cálculo como una nueva manera de hacer ciertas tareas matemáticas para resolver problemas de cuadraturas y cálculo de tangentes, que hasta el momento sólo se resolvían para casos particulares y por métodos singulares.

Antes de que existiera los conceptos de límite y de función, la derivada se introducía vía las "fluxiones" de "fluentes". Los fluentes eran variables que dependían del tiempo en tanto que las fluxiones eran una especie de razón de cambio con una idea implícita de "paso al límite" Newton (1666). Simultáneamente, Leibniz (1675) trabajaba en la invención del cálculo usando ideas diferentes a las de Newton. Se trataba de *diferenciales* de una variable x que el denotaba dx para representar una diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de la variable. La diferencial se calculaba por procesos algebraicos y la aplicación de un "principio de continuidad"[2] para obtener la pendiente de la tangente; en tanto que la cuadratura de una curva era el proceso inverso, es decir, la suma de las ordenadas equidistantes $y\,dx$, con $dx=1$. Estas ideas serían popularizadas por los hermanos Bernoulli (1696) y en particular aparecerían en un texto de cálculo que escribió el Marquez G.F.A. L'Hospital. Leonhard Euler, además de los Bernoulli, continuó los trabajos de Leibniz y utilizó coeficientes diferenciales en los que ya aparece la idea de función como relación entre variables la variable y depende de otra variable x que se considera independiente. Otro enfoque diferente a los dos que han mencionado fue ideado por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Se trataba del desarrollo de las ideas del cálculo tomando como fundamento la idea de encontrar el desarrollo de la serie de potencias de la función *y* las "funciones derivadas de *f*" serían los coeficientes $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, etc. del polinomio:

$$f(x+i)= a_0(x)+ a_1(x)i + a_2(x)i + a_2(x)i^2/2 +...$$

Este cálculo de las funciones derivadas no recurría ni a los límites ni a los diferenciales y señaló una nueva forma: la de las series de Taylor. Como señala Gratan-Guinness (1991) estas tres diferentes técnicas del cálculo llegaron a convivir en la enseñanza francesa y en los textos de comienzos del siglo XIX –en la Ecole Polytechnique (véase Guinness 1991, p. 369). En 1815 ensenó en el mismo curso las tres formulaciones. Con la aparición del texto Cours d'analyse (1821) en la que Augustin-Louis Cauchy formula su teoría de límites

[2] Este principio lo enunció Leibniz en 1687 en una carta a Bayle y dice que: "en *cualquier supuesta transición que acaba en un término, es válido elaborar un razonamiento general en el que el término final esté incluido*». (Ver, Leibniz, Early Mathemathical Manuscripts, pp. 151-52 (referencia en Boyer, 1959, p. 218)

y la utiliza como fundamento del análisis matemático, la situación se inclinaría por el enfoque de los límites, presentación que hoy día sigue dominando.

Este breve informe de la historia muestra que desde su génesis el cálculo pareció surgir de ideas que se fundamentaban en conceptos diferentes, pero finalmente se impuso la versión que toma el límite como concepto fundamental. Esta idea fue reforzada por cierta interpretación del perfeccionamiento de la teoría que realizó Kart Weierstrass entre 1860 y 1870 cuando realizó la formulación rigurosa de continuidad en términos de “épsilon y delta”. Para el curso de esta investigación esta definición se puede entender cómo se retoma en toda su riqueza el “concepto de proximidad” que es una propiedad local que preservan las funciones continuas y que permite garantizar la existencia de las derivadas y del límite cuando la continuidad en el punto es removible. Esta idea nos conduce a estudiar una transposición didáctica de derivada que tome la continuidad como concepto fundamental y el concepto de límite como secundario.

La enseñanza-aprendizaje del concepto de límite resulta difícil, porque en el proceso de su construcción concurren simultáneamente un conjunto de conocimientos que son verdaderos obstáculos epistemológicos. Este hecho dificulta centrar la atención de la ayuda del profesor y de las acciones del estudiante, en la superación de estos obstáculos. La organización y ajuste de las acciones mutuas de profesor y estudiante en torno al contenido es necesaria pues los elementos conceptuales involucrados en la construcción del concepto de límite presentan una relación estructural compleja, reflejo del modo de conocer del sujeto más que de la complejidad del concepto mismo. Este hecho es reconocido en las conclusiones de Cornu (1981) respecto a los obstáculos cognitivos que surgen en el proceso de aprendizaje del concepto:

> Los obstáculos a franquear no están forzosamente dispuestos "en serie", ellos están organizados entre sí de una manera compleja y un tema interesante de búsqueda podría ser el analizar esta organización, y colocar a punto las secuencias permitiendo de seguro al alumno el franqueamiento de los obstáculos, conociendo a cada instante dónde se está. (Cornu, 1981, p. 256)

Esta afirmación de Cornu es compartida por Delgado (1996); quien demostró en una ingeniería didáctica (1998) que es posible diseñar un *conjunto fundamental de situaciones* (c.f. Brousseau, 1990) de tal manera que la manipulación de *variables didácticas* permite secuenciar los obstáculos epistemológicos y, así, tener un control sobre la construcción ε-δ de continuidad de una función, por los estudiantes del primer curso de Cálculo en la universidad. A partir de esta construcción conceptual de la continuidad, dice Delgado, es posible introducir la derivada de Caratheodory que es mucho más accesible cuando se piensa como una función de pendientes de rectas secantes ancladas en un punto (x_0, $f(x_0)$) cuando la función es continua en dicho punto. Este giro en la transposición de los conceptos básico del cálculo retomaría el enfoque algebraico que propuso Lagrange – aunque él no disponía de una definición de continuidad– para definir la derivada (c.f. Delgado 1998, pp. 198-200) frente al que impuso Cauchy vía el concepto de límite a partir de 1852.

> [...] en este momento se presenta el abandono de una línea de desarrollo conceptual, la de la continuidad como base de la diferenciación y se inicia el predominio del concepto de límite como noción fundamental. (Delgado, 1998, p. 200)

En esta tesis se propone y justifica una transposición del concepto de derivada via la definición de Caratheodory fundamentada en el concepto de continuidad y que Acosta y Delgado (1994) probaron que es equivalente a la derivada de Maurice Frechet, con lo cual la definición se aplica a funciones vectoriales de dimensión finita y su cálculo se reduce a una factorización y la aplicación del concepto de continuidad.

1.3 Pertinencia de la investigación

La preocupación, respecto a la comprensión conceptual, es pertinente dada la importancia que tienen las matemáticas en la formación de los ingenieros y se ajusta al reconocimiento del papel de las matemáticas en el desarrollo de un pensamiento Lógico-Matemático potente para resolver problemas complejos de la "vida" en los que intervienen conceptos de diferentes disciplinas –ciencias experimentales y ciencias sociales.

Este reconocimiento se refleja en el currículo de los programas de ingeniería de la PUJ en el que cerca del sesenta por ciento de su contenido está destinado a la componente matemática y científica. Esta asignación de contenidos y su organización está en función de las competencias que se espera desarrollen los alumnos y que están vinculadas con el desarrollo de un pensamiento matemático avanzado. Una comprensión de los conceptos matemáticos limitada a la “comprensión instrumental” (c.f. Skemp, 1976) o “saber hacer” sin acceder al “saber cómo”, que se alcanza con la “comprensión relacional”, “simbólica” y “conceptual”, limita los desempeños de los alumnos en los cursos de matemáticas y en la asimilación de los cursos de la componente Científico-Técnica y en consecuencia es un factor que alimenta el fracaso y la deserción universitaria. Por esta razón es importante investigar las causas de las limitaciones en la comprensión conceptual e indagar por los mecanismos institucionales –por ejemplo: la transposición didáctica– que podrían contribuir a cerrar la brecha entre la comprensión algorítmica y la comprensión conceptual (c.f. Schapiro, 1999).

2 MARCO TEÓRICO Y UNIDADES DE ANÁLISIS

2.1 PRESENTACIÓN

El presente marco teórico tiene el propósito de hacer explícitas las *unidades de análisis* y las *teorías* en que ellas se apoyan, que consideramos pertinentes para estudiar un «fenómeno didáctico», relacionado con una transposición didáctica del concepto de derivada.

2.1.1 Perspectiva epistemológica, la evolución conceptual en la historia y el aprendizaje

Según la teoría de la *epistemología genética* de Piaget, lo real *no* es independiente del observador. El sujeto aprende *adaptándose* al medio que es generador de perturbaciones y conflictos, esta posición es compartida por Toulmin (1972) cuando se refiere a la «racionalidad de la obra científica». Para Toulmin (1972) *la dinámica* de la racionalidad científica

> [...] concierne mucho más directamente a cuestiones de función y adaptación –a las necesidades y exigencias reales de las situaciones problemáticas que los conceptos colectivos y los métodos de pensamiento de los hombres están destinados a abordar– que a consideraciones formales (Toulmin, 1972/1977, p. 11)

Este enfoque de la explicación del progreso del conocimiento científico permite centrar la atención en los factores y mecanismos presentes en la generación de nuevo conocimiento. Tanto para Piaget como para Toulmin el planteamiento de los problemas en una época determinada define los métodos, las variables conceptuales y los mecanismos de selección compartidos por la comunidad científica.

El concepto de problema. Según Toulmin, existe un problema (P) para la ciencia cuando las explicaciones corrientes (C) entendidas como los conocimientos e instrumentos disponibles para lograr la inteligibilidad necesaria y suficiente para el éxito de la acción científica no satisfacen los ideales explicativos (I); es decir, aquellas concepciones acerca de la *forma general que debe tomar una explicación completa* de cierto *fenómeno*, que la comunidad visualiza virtualmente como necesaria o deseable, pero que no están a su alcance.

Problemas científicos = Ideales explicativos – Capacidades corrientes.

Tanto para Toulmin como para Piaget, dice Delgado (1998), más que los estados iniciales y finales del conocimiento interesa los *procesos de transformación* de los conocimientos.

Bajo estos supuestos fundamentales Toulmin propone, como unidad de análisis la *variación conceptual* focalizando la atención en los tipos de problema que surgen de una época a otra, sus debates y las soluciones propuestas. Así Siguiendo la presentación de Delgado (2003) consideramos

Cinco tipos de problemas:

> Consideremos por turno las cinco clases típicas de fenómenos. a) Siempre hay ciertos fenómenos que la ciencia de la naturaleza puede esperar razonablemente explicar, pero para los que ningún procedimiento disponible proporciona todavía un tratamiento exitoso... b) Siempre hay fenómenos que pueden ser explicados hasta cierto punto usando procedimientos explicativos corrientes, pero con respecto a los cuales los científicos desearían explicaciones más completas o más precisas... c) Comprende los problemas que se presentan cuando consideramos la mutua relación de diferentes conceptos coexistentes en una misma rama de la ciencia... d) Incluye los que conciernen a la mutua relación de conceptos de diferentes ramas de la ciencia... e) Estos problemas surgen de conflictos entre conceptos y procedimientos corrientes, de las ciencias especiales y las ideas y actitudes corrientes entre la gente en general.(Ídem. p. 187–188). (citado por Delgado 2003, p. 99)

Y tres formas de resolver los problemas:

> En teoría, en todo caso, se puede comenzar a resolver problemas de cualquiera de los cinco tipos principales examinados en el capítulo anterior en cualquiera de tres modos alternativos: 1) refinando la terminología, 2) introduciendo nuevas técnicas de representación o 3) modificando los criterios para identificar casos a los que sean aplicables las técnicas corrientes. (Ídem. p. 215) (Ídem, p 99)

Para estudiar la evolución conceptual en la historia, Toulmin propone considerar un modelo darwiniano de «variación conceptual-selección» –semejante a la evolución biológica– y para ello propone considerar tres representaciones

A) Representación transversal: se identifican conjuntos representativos de todos los conceptos presentes en épocas sucesivas del desarrollo de una ciencia.

B) Representación longitudinal: se estudia la aparición, desarrollo y destino ulterior de conceptos particulares a lo largo de toda la historia de vida del concepto.

C) Representación evolutiva: da cuenta de la evolución de los conceptos en función de las representaciones A y B, ya mencionadas.

Esto será ampliado en el capítulo de la metodología.

Epistemología y aprendizaje. Uno de los valiosos aportes que realizó *Gaston Bachelard* a la teoría moderna del conocimiento es sin lugar a dudas el concepto de «*obstáculo epistemológico*»: *es* un *conocimiento* que se tiene previamente, que tiene su éxito en ciertas situaciones pero que en otras obstaculiza el aprendizaje de un concepto nuevo. En palabras de Bachelard:

> Es en términos de obstáculos que se debe plantear el problema del conocimiento científico. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos las causas del

> estancamiento y hasta del retroceso. Es ahí donde discerniremos causas de inercia, que llamaremos obstáculos epistemológicos (Bachelard 1938, p.13).

Esta célebre cita plantea que la esencia de los obstáculos está en el terreno del mundo interno del sujeto, «en el acto de conocer», que se resiste por alguna clase de «necesidad funcional» al cambio conceptual.

Un obstáculo epistemológico es un contra pensamiento. El epistemólogo, dice Bachelard, (y todo el que intente comprender) debe esforzarse por captar los conceptos científicos en síntesis psicológicas progresivas, estableciendo, respecto de cada noción, una escala de conceptos, mostrando cómo uno produce otro, cómo se vinculan entre sí. Ello permite apreciar la eficacia epistemológica, el obstáculo superado.

Por otra parte, Piaget (1975/2000) retoma esta idea de obstáculo epistemológico y lo amplía definiendo un constructo que denominó «*obstáculo cognitivo*»: una forma de *perturbación* al funcionamiento del *ciclo de interacción cognitivo* sujeto-objeto que se expresa en una resistencia de la *acomodación* de los esquemas asimiladores a ciertos aspectos particulares del dato externo y da lugar a la interrupción de la acción o a los errores y al fracaso de la acción. Para Piaget, a diferencia de Bachellard, tales rupturas no son absolutas sino que implican diferenciaciones e integraciones entre lo que ya se conoce y lo que está por ser conocido, con base en los mecanismos cognitivos que permiten el avance del conocimiento tanto en la ciencia como en el sujeto:

> Nuestra interpretación tiene, sin duda, relación directa con la posición de Gaston Bachelard, quien ha sido el primero en señalar la importancia de lo que él llama "obstáculo epistemológico" y "ruptura epistemológica" en el desarrollo de la ciencia.
>
> [...]En efecto, G. Bachelard considera una "ruptura" total entre las concepciones precientíficas y científicas, [...] Nosotros creemos, por una parte, que hay una mayor continuidad entre el pensamiento precientífico y el científico, en tanto los mecanismos en juego en el proceso cognoscitivo son los mismos; y por otra, consideramos que hay un cierto tipo de "ruptura" *cada vez* que se pasa de un estadio al otro,

> tanto en la ciencia como en la psicogénesis. (Piaget y García, 1993, p. 234)

Piaget está haciendo referencia a lo que él llamó «*sujeto epistémico*» para referirse al «núcleo cognoscitivo común a todos los sujetos de un mismo nivel» y diferenciarlo del sujeto individual. Es el momento de subrayar que Piaget, como ya lo dijimos se interesó en el estudio de la evolución del conocimiento en términos de adaptación y por ello planteó que para estudiar la *transformación de los conocimientos*, y no sólo sus estados, era necesario incluir el sujeto epistémico, lo que permitiría desarrollar una *epistemología experimental* que trabaja en el laboratorio de la historia y en el que proporciona la observación del desarrollo del sujeto que desde su nacimiento construye conocimiento, bajo el supuesto que tal núcleo cognitivo es compartido. Así, para la didáctica de las matemáticas que se ocupa de los fenómenos relacionados con el aprendizaje de los conceptos desarrollados por los matemáticos esta epistemología que se ocupa de responder la pregunta

¿Cómo se pasa de un nivel de conocimiento a otro más avanzado?

resulta muy pertinente. En este sentido, Guy Brousseau se apoya en ella para desarrollar su Teoría de Situaciones. Así, él retoma el concepto de obstáculo y el de ruptura piagetianos y los traspone de la epistemología a la didáctica de las matemáticas –él considera que la didáctica de las matemáticas es una epistemología experimental– Brousseau (1983; 1989) afirma:

> Es inevitable que el aprendizaje y *a fortiori* la enseñanza, especialmente cuando se basa en la comprensión de los conceptos comunicados, hagan surgir los obstáculos cognitivos (Brousseau, 1989, p. 277)

Y, en particular Brousseau identifica tres fuentes de los obstáculos cognitivos:

- Ontogenéticos, los que se relacionan con los estados de desarrollo de las estructuras cognitivas del sujeto.

- Didácticos, se originan en elecciones "erróneas" de la transposición didáctica

- Epistemológicos, relacionados con la naturaleza misma del conocimiento matemático, «se verifican en la historia y participan en la significación de las nociones a las cuales ellos se relacionan» (ídem. p. 277)

y agrega una cuarta fuente asociada a los obstáculos que se generan en la sociocultural.

> Sería erróneo asumir que los obstáculos provienen sólo de la naturaleza del hombre, de sus conocimientos, o falta de habilidad para enseñar, porque algunos de ellos sólo pueden desaparecer a costa de una cierta evolución de la cultura y el conocimiento epistemológico y didáctico de la Noosfera (obstáculo cultural). Su superación está fuera del alcance de una acción de enseñanza en el sentido clásico: ellos reclaman acciones didácticas de diferente naturaleza. (Brousseau, 1989, p. 277).

De esta manera el concepto de *obstáculo cognitivo* ingresó a la didáctica de las matemáticas y ha resultado ser un concepto potente para explicar ciertos comportamientos del estudiante en su aprendizaje de las matemáticas, y como elemento teórico es un instrumento para *modelizar* e *investigar* los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Así, cuando, desde la perspectiva de la enseñanza, un *conocimiento obstáculo* es reconocido, no tiene sentido buscar una vía para eludirlo y, por el contrario, hay que enfrentarlo diseñando situaciones para que ellos se manifiesten con el objetivo que el estudiante tome conciencia de las limitaciones de su conocimiento actual y busque superarlas –con ayuda de la mediación del profesor– y así lograr los aprendizajes que socialmente se espera que alcance. En consecuencia, la investigación de obstáculos cognitivos, de diversas fuentes, es importante para comprender la naturaleza de un obstáculo análogo descubierto en el alumno y mediar en sus aprendizajes.

En nuestra propuesta de investigación y en el desarrollo de la dimensión epistemológica el origen del obstáculo resulta de gran importancia, de hecho este estudio nos proporcionara la suficiente información para dar cuenta de uno de los objetivos trazados en esta investigación

«*Identificar los obstáculos cognitivos y dificultades del concepto de la derivada*».

Este objetivo es necesario para elaborar una «*estructura teórico conceptual*», asociada al concepto de derivada, como la definiremos más adelante.

2.1.2 Mecanismos y procesos de conocimiento

Si bien es cierto que en esta tesis únicamente abordamos el aspecto epistemológico para identificar los contenidos conceptuales y sus relaciones asociadas a la derivada en un *nivel de modelación metadidáctico*[3] de la enseñanza, también reconocemos que existen otros niveles de estructuración del *medio didáctico* que no consideramos aquí; por ejemplo, el diseño de situaciones didácticas y la mediación del profesor; como tampoco la acción de los estudiantes respecto a tales situaciones y las consideraciones cognitivas que habrían de tomarse en cuenta. Así, para seleccionar y relacionar los elementos en el estudio histórico epistemológico del concepto de derivada, capítulo IV, y construir una estructura teórico conceptual, como veremos en el capítulo V, de una u otra manera hemos considerado los conceptos piagetianos de conocimiento, esquema, asimilación-acomodación, equilibración, abstracción reflexionante, marco epistémico y el ya mencionado de obstáculo cognitivo. En consecuencia haremos una breve presentación de tales conceptos.

Piaget no define «conocimiento», pero afirma que conocer es *observar* y *transformar*,

> [...] el conocimiento no es una simple copia de lo real, sino una organización que procede mediante equilibrios y reequilibrios continuados. (Piaget, 1966/1969, p. 14)

La equilibración es el mecanismo de autorregulación del sistema cognitivo, en tanto que es un sistema abierto, que intercambia información con el medio y las funciones que están presentes son la asimilación entendida como incorporación de elementos externos al medio interno siempre acompañada de la función recíproca de acomodación de las formas generales asimiladoras al dato externo. Los agentes del intercambio son lo que Piaget denomina «esquemas de acción»: son producto de abstracciones que tienen su origen en la repetición de la acción y sus resultados de éxito y fracaso.

[3] Ver Brousseau (1997), La estructuración del *Melieu* didáctico, p. 248,

> […] Por definición, el esquema de una acción es el conjunto estructurado de sus rasgos generalizables, esto es, de los que permitan repetirla o aplicarla a nuevos contenidos. Ahora bien, un esquema de acción no es ni perceptible (lo que se percibe es una acción determinada, no su esquema) ni directamente introspeccionable, y sólo se adquiere conciencia de sus implicaciones repitiendo la acción y comparando sus resultados sucesivos. (Beth Piaget , 1980, p. 259).

Los esquemas de acción son susceptibles de convertirse en «*esquemas operatorios*» cuando se interiorizan –proceso de abstracción reflexionante– en el pensamiento y se hacen reversibles –la acción se puede hacer y deshacer en el pensamiento. Si el esquema operatorio es objeto de la reflexión y toma de conciencia de su funcionamento y se *tematiza* –se expresa en lenguajes–, entonces se dice que es un «*esquema conceptual*», que ahora se puede discutir con otros y llegar a acuerdos respecto al significado y sus relaciones con otros conceptos.

Los *desequilibrios* entre las funciones de asimilación y acomodación, que caracterizan el funcionamiento de los esquemas, están en el origen de los procesos constructivos que se explican mediante los procesos de abstracción – empírica y reflexionante. La primera se refiere a lo que el sujeto abstrae pero que pertenece a los objeto, por ejemplo el peso, el color, etc. La segunda son producto de inferencias que el sujeto hace de sus acciones –coordinaciones generales de las acciones– e implica dos formas de construir nuevo conocimiento:

a) Por reflejamiento de un conocimiento de un plano, en el que ya existe, a otro plano superior en donde se integra con los conocimientos ya existentes, enriqueciéndose mutuamente y esto ya es una construcción –*abstracción reflejada*–y

b) por reflexión, razonando sobre lo que ya ha sido proyectado sobre el nuevo plano pero que puede permanecer inconsciente y ligado a la acción, pero ahora por la reflexión se hace consciente y se tematiza, dando lugar a generalizaciones de diferentes tipos –*abstracción reflexionada*.

Debido a estas características de la abstracción reflexionante, Piaget concluye que:

> Desde el punto de vista psicológico, lo propio de la construcción y de la creación matemática parece ser, pues, que no se reducen ni a descubrimientos ni a invenciones, sino a una sucesión indefinida de combinaciones al mismo tiempo nuevas y, sin embargo, interiores a un sistema de posibilidades bien determinadas. (Beth & Piaget, 1961/1980, p. 230)

De esta manera se concluye que *el conocimiento matemático es producto de abstracciones reflexionantes* tanto en la ontogénesis como en la filogénesis del conocimiento matemático, como los constatan Piaget y García (1982). Esta proposición es la que guía nuestro análisis histórico del concepto de la derivada.

Marco epistémico. El término supera el concepto de «paradigma» Khuniano que éste define en dos sentidos:

> «[*en sentido sociológico*] creencias, valores, técnicas y así sucesivamente compartidos por los miembros de una comunidad... [y *ejemplares*] que usados como modelos o ejemplos, pueden reemplazar a reglas explícitas como base para la solución de los enigmas restantes de la ciencia normal» (Thomas S. Khun, 1962/1994, p. 269, corchetes incorporados)

Si pensamos en la propuesta epistemológica de Piaget vemos que esta definición de paradigma Khuniano no toma en consideración al sujeto epistémico. Para cubrir esta ausencia, Piaget y García (1982) proponen una visión epistemológica tal que, incluyendo la idea de paradigma de Khun, permita explicar en términos de los invariantes funcionales –equilibración, asimilación-acomodación, ya mencionados–, los procesos constructivos del *sujeto epistémico* que actúa bajo la influencia de los *paradigmas sociales* que otorgan significaciones especiales a los objetos según el contexto. El marco epistémico *entonces es producto de una interacción dialéctica entre un «paradigma epistémico» –modo de conocer, de comprender las relaciones entre los objetos y de entender a otros– y el «paradigma social» dominante.* Sin embargo, ellos sostienen que en cierto momento no se puede discernir lo que proviene del *paradigma epistémico* y del *paradigma social* y en tal caso se habla de «largos periodos en que predomina una *ideología*» que condiciona las características de los objetos y teorías científicas que responde a necesidades de la ciencia y también a demandas sociales externas a ella (Ver Piaget & García, 1993, pp. 227-245).

Esta noción de marco epistémico resulta útil para identificar las rupturas con un paradigma y el surgimiento de uno nuevo en el cual la comunidad científica *replantea los problemas* para alcanzar respuestas más viables con sus ideales explicativos y esto será una de nuestras unidades de análisis para caracterizar los problemas que caracterizan la evolución conceptual.

Estos planteamientos epistemológicos conducen a afirmar categóricamente que:

> Tanto en la escuela como en la comunidad matemática el conocimiento no surge de forma milagrosa, transparente, inmediata, de una vez y para siempre. Todo lo contrario, la aproximación epistemológica de la matemática muestra la lenta variación del estatuto de una noción. Así, como los problemas que constituyeron su fuente, los obstáculos que hubo que salvar y las dificultades conceptuales evacuadas para alcanzar su solución. (Delgado, 2003, p. 91)

Desde este punto de vista la historia de la evolución de los conceptos se constituye en un referente indispensable para anticipar algunos de los obstáculos y dificultades que el estudiante de matemáticas deberá superar para re-construir el conocimiento matemático que el sujeto social ha construido en el transcurso del tiempo.

2.2 Estructuras teórico conceptuales y Transposición didáctica.

2.2.1 Las estructuras teórico conceptuales

En el análisis discurso matemático se habla de estructuras teórico conceptuales referida a un contenido matemático específico. Se define una estructura teórico conceptual con relación a un tema matemático determinado como:

> Una estructura teórico conceptual matemática, es un conjunto estructurado de conceptos, problemas y procesos matemáticos, mediante la cual se caracteriza

> un saber matemático presente en un discurso matemático especifico, que puede tener o no fines de enseñanza.(Álvarez, 2009,)

Las relaciones que destacamos entre conceptos son de dos tipos: *definicionales y proposicionales.* Los nexos *definicionales* se refieren a las conexiones que se establecen entre conceptos mediante definiciones. Con la excepción de «términos no definidos» que sirven como puntos de partida en teorías axiomatizadas, en matemáticas los ***conceptos*** se refieren a los objetos o entes matemáticos que se establecen mediante «definiciones». Los conceptos no vienen aislados, constituyen *núcleos* con base en los cuales se van formando *estructuras conceptuales* amplias. La definición de conceptos se apoya en otros conceptos (conceptos componentes o de soporte). Esta concatenación es fundamental en la construcción del conocimiento matemático.

Desde el punto de vista de la construcción cognitiva no es posible acceder comprensivamente a nuevos conceptos sin poseer los esquemas asociados a los conceptos de soporte. En esta perspectiva, muchos conceptos se introducen con el único fin de preparar el camino de un concepto central. Alrededor de estos conceptos centrales se configuran los que hemos dado en llamar *núcleos conceptuales*. En éstos núcleos también suelen surgir conceptos, que sin ser de soporte, vienen a complementar y/o operacionalizar un concepto. Mientras el concepto *conjunto* es un concepto componente o de soporte del concepto *función*, conceptos como *dominio*, *imagen* pueden considerarse *complementarios*. Hay también conceptos que toman un concepto central como soporte para profundizar en él generando categorías en el concepto original. Conceptos como los de *función inyectiva y sobreyectiva*, respecto del concepto función, serían de esta naturaleza. En definitiva, es importante con fines de enseñanza, no solo identificar sino también jerarquizar tales conceptos identificando la estructura en que están insertos para los propósitos de la enseñanza prevista.

Los nexos proposicionales se refieren a proposiciones que se establecen entre conceptos y que vienen a completar la estructura teórico conceptual del tema. La estructura teórica conceptual está definida consecuentemente, tanto por los nexos definicionales como por los nexos proposicionales.

Las estructuras teórico conceptuales son un referente fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y, por lo tanto, es necesario que los eventos de la enseñanza creen las condiciones para que se hagan explícitas como objeto del aprendizaje. Las proposiciones constituyen los resultados teóricos que los textos subrayan como teoremas según las concepciones de los autores. Es importante aclarar que, desde la óptica de la construcción de un conocimiento personal significativo, que la forma de presentar dicha estructura es relativa dentro de ciertos límites, que los nexos teóricos pueden ser construidos de distintas maneras y que los nexos que se destacan pueden tener variaciones de acuerdo con la manera de comprender el tema. Más aún, que desde la práctica matemática personal (el estudio de los problemas que se resuelven, por ejemplo), cada estudiante puede y debe enriquecer dicha estructura y elaborar sus propias representaciones de ella.

Según Álvarez (2009) en la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras teórico conceptuales, la técnica de los mapas conceptuales se puede constituir en una gran ayuda, en cuanto proveen un medio semiótico para representar dichas estructuras, facilitando su análisis y discusión desde distintas perspectivas. En los análisis usamos el concepto de mapas conceptuales ajustados que, aunque inspirados en las ideas de Novak y Gowin introducen algunos ajustes cuando se aplican a la representación de estructuras teórico conceptual en matemáticas.

Sistemas semióticos de representación matemática. Nos apoyamos en la teoría de Raymond Duval (1995) en la cual se definen los sistemas de representación (semióticos) como conjuntos de símbolos, figuras y gráficas (registros semióticos), con sus reglas de manejo, que se ponen en juego en el discurso matemático para designar o representar conceptos, incluidos lo que hemos llamado nexos definicionales y proposicionales. Un mismo concepto puede estar asociado con distintas situaciones y adoptar, por lo tanto, formas diversas de representación unas más abstractas y generales que otras. El estudio de los sistemas semióticos de representación en que se expresan tales estructuras teórico conceptuales son fundamentales en el análisis, con fines didácticos, de los procesos de enseñanza aprendizaje de tales estructuras y de los procesos matemático que se expresan en ellas. Veamos un gráfico (Álvarez, J. (2009)). Que nos muestra de forma resumida los elementos mínimos que se movilizan en la construcción de una estructura de teórico de un de un concepto matemático cualquiera:

ESTRUCTURAS TEORICO – CONCEPTUALES (ETC)

(Conocimiento conceptual)

- Conceptos matemáticos
- Relaciones entre conceptos
  - Nexos definicionales
  - **Nexos proposicionales**
- Interacciones de conceptos matemáticos – conceptos no-matemáticos
- (Mate matización: Modelos socializados)
- Problemas de base.
- Sistemas semióticos de representación matemática

PROCESOS MATEMÁTICOS

(Procesos de transformación simbólica

Conocimiento procedural y estratégico

Procesos de cálculo. Algoritmos

- Procesos de justificación y prueba inherentes a la ETC
- Solución de problemas. (Problemas de base teóricos y aplicados (Mate matización) inherentes a la ETC)

LENGUAJE MATEMÁTICO

- Manejo simbólico. Sistemas de representación y reglas lógicas

Figura 1. Elementos para una conceptualización operativa de formación matemática como estado o las componentes de una estructura teórico conceptual

2.2.2 La transposición didáctica: transformación del objeto matemático en objeto de enseñanza.

El concepto de derivada Caratheodory requiere de una transposición didáctica diferente a la del concepto de derivada tradicional y en ésa dirección nos apoyamos en la teoría de la transposición didáctica de Yves Chevallard (1991), desarrollada en su texto: La transposición didáctica *"Del saber Sabio al saber Enseñado"* donde define dicho concepto de la siguiente manera:

> Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptivas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica. (Chevallard, 1991, p. 45).

Objeto de saber $\rightarrow$ Objeto de enseñanza

> La transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica stricto sensu". Pero el estudio científico del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la didáctica de las matemáticas) supone tener en cuenta la transposición didáctica sensu lato, representada por el esquema:

$\rightarrow$ Objeto de saber $\rightarrow$ Objeto a enseñar $\rightarrow$ Objeto de enseñanza

> En el que el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido."(Chevallard, 1991, p. 46).

Se observa en el esquema que el "objeto de saber" es en sí mismo un producto de una transposición (lo cual se indica con la primera flecha o primer eslabón: «de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido»).

3 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y LA METODOLOGÍA

3.1 PRESENTACIÓN

Esta investigación se enmarca en un estudio de tipo exploratorio respecto a la génesis histórica del concepto derivada y sus relaciones con los conceptos que definen una estructura conceptual, con el fin de proponer una transposición didáctica más viable que la tradicional que ya hemos descrito en los antecedentes de este trabajo. A continuación se describe el problema de investigación, los objetivos y la metodología.

3.2 El problema de investigación

Nuestro problema se plantea en términos de las siguientes preguntas:

1. ¿Qué problemas y necesidades dan origen al concepto derivada? ¿Qué obstáculos epistemológicos emergen en su desarrollo histórico?

2. ¿Cuál sería una estructura teórico conceptual que permitiera la organización de los problemas, técnicas, propiedades y demostraciones que conforman el concepto de derivada vía Caratheodory?

3. ¿En qué medida la definición vía Carathéodory permite anticipar una mayor accesibilidad cognitiva a la derivada y qué problemas se pueden suscitar en el aprendizaje de este concepto por esta vía?

3.3 Hipótesis de investigación

Durante el desarrollo de este proyecto se espera aportar argumentos para verificar o refutar la siguiente hipótesis de investigación:

Es posible elaborar una transposición didáctica de la derivada, basada en la definición de Carathéodory, tal que:

- *haciendo necesaria e ineludible al estudiante la comprensión conceptual, en el proceso de estudio de la derivada, propicie la superación de la comprensión típicamente instrumental que ha venido caracterizando el aprendizaje de este concepto entre estudiantes universitarios.*

3.4 Objetivos

3.4.1 Objetivo General

Aportar elementos para caracterizar una transposición didáctica asociada a la derivada utilizando la definición de Carathéodory.

3.4.2 Objetivos Específicos

1. Identificar en la historia, los problemas, las necesidades y obstáculos presentes en el surgimiento del concepto de Derivada y conceptos Asociados.

2. Caracterizar una estructura teórico conceptual, que se propone como fundamento matemático para una propuesta de enseñanza de la derivada basada en la definición de Carathéodory.

3. Caracterizar las demandas cognitivas que le plantea al alumno la construcción del concepto de derivada vía Carathéodory.

4. Identificar algunos de los pro y contras que se pueden anticipar de una propuesta de enseñanza de la derivada vía Carathéodory desde las dimensiones, Matemática, Cognitiva y Didáctica

3.5 Metodología

En el desarrollo de este proyecto se consideraron los siguientes procesos para alcanzar cada uno de los objetivos. A cada proceso corresponderán ciertos instrumentos de investigación, pero que estarán en concordancia con las unidades y dimensiones de análisis.

3.5.1 Con relación al objetivo 1:

> "*Identificar los problemas, las necesidades y obstáculos presentes en el surgimiento del concepto de Derivada y los conceptos Asociados".*

El método que se seguirá para dar cuenta del objetivo 1, consiste en realizar un estudio histórico del concepto de derivada, con el fin de identificar los problemas que hicieron necesario el surgimiento del concepto de derivada, las soluciones que se alcanzan en ciertas épocas, las lagunas y los obstáculos epistemológicos que detuvieron o impidieron el desarrollo de este concepto, durante ciertos períodos de la historia. Este estudio deberá dar respuesta a la pregunta 1 del problema de investigación.

El instrumento de análisis consistirá en una rejilla que permitirá sistematizar las respuestas que la investigación encontró respecto de la evolución del concepto según el modelo de Tulmin (1997). En este sentido se propone considerar tres variables: A) Representación transversal, B) Representación longitudinal y C) Representación evolutiva.

A) *Representación transversal*. En este caso consideramos el concepto de la derivada y todos los conceptos que se le relacionan en cada época.

> La virtud de este análisis es que permite el estudio racional del cambio desde el punto de vista, lógico formal que plantea la relación entre los conceptos en cada época; su debilidad es que la explicación de la aparición de nuevos conceptos y el abandono de otros, que se observa al comparar conjuntos representativos sucesivos, no se puede obtener del análisis lógico formal de los conceptos de cada conjunto representativo. La causalidad de los cambios conceptuales se refiere a «los cambios «no lógicos» entre conjuntos representativos de conceptos, es decir a las condiciones en que podemos decir que se ha agregado un nuevo concepto

> o se ha desplazado uno viejo *por buenas razones*». (Delgado, 2003, p. 96)

B) En consecuencia se hace necesario el estudio longitudinal. *Representación longitudinal*.

> *El análisis longitudinal*, consiste en estudiar la aparición, desarrollo y destino ulterior de conceptos particulares a lo largo de toda la historia de vida del concepto. Este análisis permite identificar cada punto de ramificación o de interrupción de la línea genealógica y pone en evidencia las «buenas razones» que en el momento se expresan para aceptar o rechazar un concepto. La debilidad de esta dimensión de análisis consiste en que: "no logra diferenciar los dos aspectos complementarios del cambio conceptual: I) la introducción en el debate en curso de variantes conceptuales cuyo mérito aún no ha sido evaluado y II) la incorporación en el repertorio de variantes seleccionadas". Esta no discriminación está presente, porque para alcanzarla es necesario el análisis lógico formal de los conceptos en cuestión. Pero este análisis no es posible sin tomar en cuenta un conjunto representativo de conceptos relacionados. (Delgado, 2003, p. 96)

De esta manera, dice Delgado, las variables que determinan la explicación del cambio conceptual son el *aspecto relacional* que se deriva del análisis transversal y el *aspecto causal*, resultado del análisis longitudinal. Finalmente la relación de estos dos análisis informa sobre el aspecto evolutivo del concepto.

> El análisis de la tripla (A, B, C) "ofrece la gran ventaja de señalar claramente las diferencias entre innovación y selección". (Delgado, 2003, p. 97)

> Establecidas las representaciones se debe intentar responder a tres conjuntos de preguntas, "que permitirán elaborar un cuadro, del cambio conceptual como un proceso histórico en el que son operativos tanto los

factores racionales como los causales" (Ídem. p. 212). (Delgado 2003, p. 97)

Estas preguntas, son

A) Respecto a la innovación o variación conceptual. Se refiere a las preguntas que permiten establecer las consideraciones y factores de la innovación conceptual.

1. ¿En qué circunstancia aparecen las innovaciones conceptuales, en una disciplina particular o en muchas?.

2. ¿En qué condiciones el ingreso de tales variantes será vigoroso o lento, o más vigoroso en una disciplina que en otra?.

3. Si la variación conceptual se produce predominantemente en ciertas direcciones preferidas, ¿Qué factores o consideraciones son responsables por la elección de esas direcciones?.

B) Con respecto a las cuestiones concernientes a los procedimientos de selección. Se refiere a los procedimientos de selección por los que se aceptan algunas variantes, se rechazan otras y se ponen en reserva otras aún, a la espera de una prueba adecuada. Por ejemplo:

1. ¿Qué tipo de factores o consideraciones determinan cuáles de las variantes conceptuales son aceptadas y, por ende, ingresan al repertorio establecido?.

2. ¿En qué medida reposa esa selección en apelaciones explícitas a consideraciones cuya relevancia y fuerza persuasiva son colectivamente reconocidas dentro de la profesión?.

3. ¿Se puede dar una explicación satisfactoria de los criterios por los cuales los que practican una ciencia distinguen los cambios conceptuales bien fundados y apropiadamente justificados de los cambios mal concebidos, apresurados, retrasados o no intencionales?

C) Respecto a la relación entre cambio conceptual y unidad de la ciencia. Toulmin considera, por último, conjuntamente los aspectos A y B de los cambios conceptuales:

1. ¿En qué circunstancias el equilibrio entre la variación y la perpetuación selectiva servirá para mantener la continuidad de una disciplina única y compacta?.

2. ¿En qué circunstancias conducirá, en cambio, al abandono de una disciplina anterior o a su desplazamiento por dos o más disciplinas sucesoras?.

Delgado, 2003, pp. 97-98)

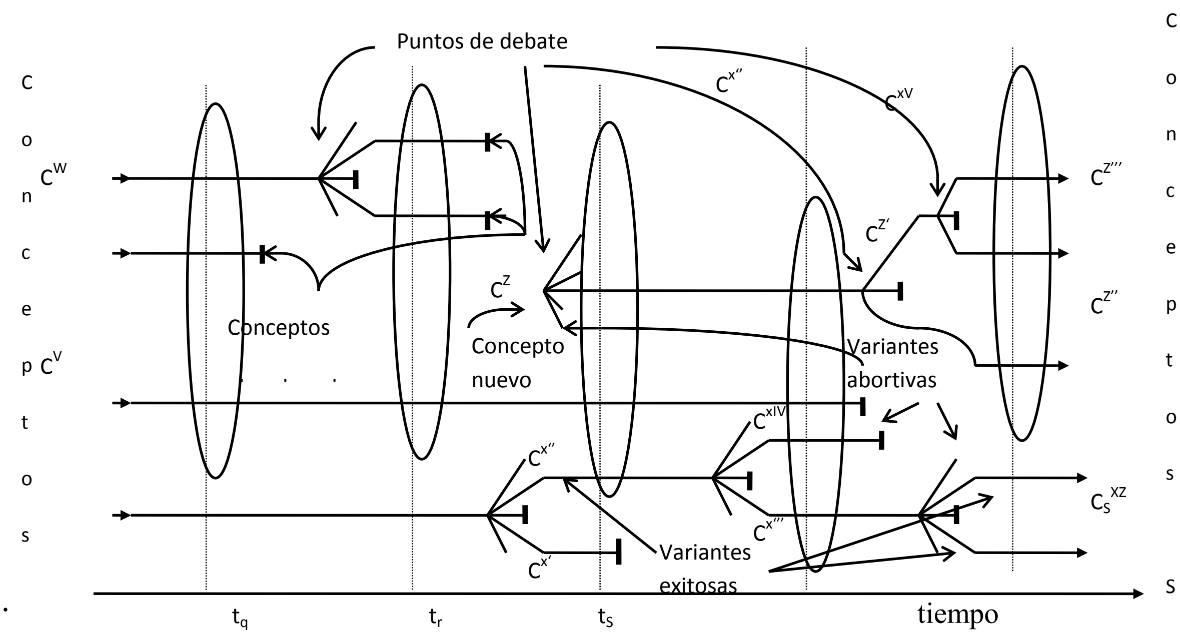


Figura 2. Representación evolutiva

3.5.2 Con relación al objetivo 2

> *"Caracterizar una estructura teórico conceptual, que se propone como fundamento matemático para una propuesta de enseñanza de la derivada basada en la definición de Caratheadory"*

Para alcanzar este objetivo se caracteriza la estructura teórico conceptual, según lo propuesto por Álvarez (2009) a partir del análisis de los contenidos que se presentan en los textos *de Calculo de Purcell* (2009) y el de James Stewart (2001) *Calculo una Variable Trascendentes Tempranas y* cruzar estas estructuras con la estructura que inferimos de la evolución conceptual para obtener un análisis crítico de la transposición didáctica en estos textos. Igualmente analizamos la propuesta curricular de los cursos de cálculo en la PUJ e inferimos la estructura teórico conceptual, relacionada con la derivada, que propone esta institución educativa de nivel superior

En la caracterización matemática de dicha estructura, se analizaran, en particular, los procesos demostrativos de los diferentes teoremas, inscritos en la ETC, como base para abordar la pregunta 2, utilizada para formular el problema de investigación. Los instrumentos serán mapas conceptuales (ajustados) para representar la ETC.

3.5.3 Con relación al objetivo 3:

> *"A partir, de la estructura teórico conceptual que se propone en el objetivo 2 caracterizar las demandas cognitivas que le plantea al alumno, la construcción personal de dicha estructura"*

Con el fin de caracterizar las demandas cognitivas que plantea al alumno la construcción de la estructura teórica conceptual que se propone en el objetivo 2, pondremos atención inicialmente en los aspectos de la construcción en los cuales puede tener presencia los obstáculos epistemológicos identificados en el objetivo 1.

En segundo lugar se estará atento a los procesos de construcción que debe realizar el sujeto, especialmente los relacionados con la abstracción reflexiva (interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión) y en particular las demandas relativas con la naturaleza dual de algunos conceptos matemáticos. Estos análisis se pondrán en marcha utilizando la metodología propuesta en (Delgado 1998) y que se inspira en los planteamientos de Piaget, respecto al funcionamiento cognitivo en términos de estados de equilibrio entre asimilación y acomodación que se puedan constatar en ciclos de interacción cognitivos. El logro de este objetivo nos servirá de fundamento para dar respuesta a la pregunta 3 utilizada para formular el problema del proyecto de tesis.

3.5.4 Con relación al objetivo 4:

> *"Identificar algunos de los pro y contras que se pueden anticipar de una propuesta de enseñanza de la derivada vía Caratheadory desde las dimensiones, Matemática, Cognitiva y Didáctica"*

El logro del objetivo 4 se obtiene, a partir de las respuestas que se den a las preguntas 2 y 3.

4 ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE DERIVADA

4.1 PRESENTACIÓN

En este capítulo se presentará un breve recorrido epistemológico del concepto de derivada de una función, atendiendo a su génesis histórica. Se considerarán aspectos fundamentales de su desarrollo evolutivo y de la construcción de este concepto; en este proceso, se ilustrarán los conceptos concernientes a la naturaleza matemática que son constitutivos y fundamentales en la construcción moderna de la derivada.

Nuestro eje director para este análisis histórico es el empleado por Toulmin, el cual considera: "que el cambio conceptual es la unidad básica de la dinámica científica" y es en este sentido que propone un modelo para analizar la evolución de los conceptos de una ciencia. En él se hace una semejanza con la teoría darwiniana de la evolución de las especies. Así, se considera un conjunto de conceptos representativos en un periodo determinado, de forma semejante a una población inicial de alguna especie, se estudia cómo estos evolucionan y se adaptan a nuevas situaciones, a los problemas que estos sufren y hacen que desaparezcan, para que al finalizar, los conceptos con variantes exitosas sean los conceptos sobrevivientes.

Este análisis histórico-epistemológico busca de un lado, revelar problemas conceptuales que a lo largo de la historia han sido factores determinantes en la institucionalización del concepto de derivada. Por otro lado, el análisis se orienta a identificar los obstáculos epistemológicos que en la época hicieron lenta la solución de los problemas y cómo ellos fueron superados. Todo esto con el propósito de mirar críticamente la transposición didáctica que se propone actualmente en los currículos para los programas de ingeniería y contrastarla con una posible transposición didáctica fundamentada en la derivada de Carathéodory, para lo cual este estudio histórico-crítico dará un fundamento epistemológico.

Las consideraciones que se hicieron en la presentación del capítulo señalan la importancia de un estudio histórico crítico del concepto de derivada para alcanzar el objetivo 1 de nuestra investigación:

Identificar los problemas, las necesidades y obstáculos presentes en el surgimiento del concepto de Derivada y los conceptos Asociados.

Cuando nos detenemos un poco en observar la forma como el concepto de derivada es compartido en las prácticas de enseñanza en la actualidad, se evidencia rápidamente, que dicho concepto se sigue comunicando con la definición dada por Cauchy. Destacando que esta definición se soporta en el concepto de límite, pero hay otras formas de introducir el concepto de derivada. En particular en nuestro estudio nos interesa la que toma como fundamento y eje transversal el concepto de continuidad.

Las presentaciones escolares vigentes que siguen la definición de Cauchy, giran en torno a tres problemas que son propuestos para dar significado y sentido a la noción de derivada: el primero, es el de recta tangente en un punto a una curva dada, el segundo es el problema de calcular los máximos y mínimos de una función dada y un tercero es el de hallar la razón de cambio de una variable respecto a otra, este último es el concepto central del cálculo diferencial y es el que permite abordar el problema de la variación y el cambio de una magnitud respecto a otra y sus aplicaciones a diferentes disciplinas.

La estructura está conformada por conceptos como: razón numérica, función numérica, límite de una función numérica y continuidad de una función, conceptos que, a su vez, están relacionados y sólo alcanzan su plena construcción formal con la *institucionalización* del concepto de número real y su identificación con los puntos de una recta –continuo numérico.

Por estas razones el interés de esta investigación, es en primer lugar tener una visión del proceso de construcción de la derivada tratando de identificar los problemas que, en distintos momentos, movilizaron la evolución y convergencia de los conceptos mencionados en la constitución del concepto moderno de derivada. Nos interesa en particular identificar los problemas que hicieron necesario el concepto de derivada y los obstáculos epistemológicos asociados que hicieron lenta su solución y cómo ellos fueron superados. En segundo lugar, queremos caracterizar las circunstancias históricas que determinaron el predominio de la definición de derivada dada por Cauchy, frente a otras alternativas que coexistieron en su momento, y señalar la posibilidad de otras definiciones, en particular la de Carathéodory, que se fundamenta en el concepto de continuidad y en el proceso algebraico de factorización.

Como se mencionó arriba este estudio se desarrollará siguiendo una versión simplificada de la metodología propuesta por Toulmin con la adaptación que propone Delgado en su tesis doctoral. Para este fin seleccionaremos cuatro momentos históricos que consideramos cruciales en dicho desarrollo y realizaremos dos análisis uno *transversal* –que señala los conceptos matemáticos y teorías disponibles en el momento– y otro *longitudinal* –que indica la continuidad, suspensión, o abandono de conceptos y teorías de una época a otra. Estos dos análisis se integran en un análisis *evolutivo* que nos informa de manera integral la génesis del concepto de derivada.

Los cuatro momentos históricos que consideramos cruciales en dicho desarrollo son: el primero de ellos el tiempo T_1: Periodo de los Griegos, planteamiento del problema de la relación del continuo geométrico frente a lo numérico; el segundo, T_2: Periodo comprendido entre los siglos XVII-XVIII, cuando se plantea el problema de las fluxiones y los diferenciales; el tercero T_3: Periodo comprendido entre los siglos XIX-XX, en torno al problema infinitesimales-límite-continuidad y por último el cuarto periodo $T_{4:}$ Periodo Moderno, el problema de la primacía del límite o la continuidad como fundamentación del cálculo.

En los tres primeros periodos se centra la atención en el proceso de institucionalización del concepto de derivada hasta llegar a la definición dada por Cauchy, concepto que lo define por primera vez en el *Curso d'Analyse* de 1821 en la tercera lección, Capítulo VIII. En el cuarto periodo se enfoca la atención en la construcción de la derivada de Frechet y el surgimiento de la definición de la derivada de Carathéodory.

En cada periodo nos preocupamos por los objetos matemáticos y sus relaciones para caracterizar el «*marco epistémico*» que condicionó el trabajo de los matemáticos y sus cambios que condujeron a construir conocimiento que permite resolver problemas que antes no se plantearon o no pudieron ser resueltos.

Inicialmente nos preguntaremos, en qué medida la dupla curva-recta tangente representó una preocupación como objeto de estudio para los matemáticos en los periodos históricos ya señalados; adicionalmente, qué tipos de problemas se resolvieron al respecto y cómo fue la evolución histórica de tales problemas y conceptos. De la misma manera nos cuestionaremos en qué medida el problema de Razón de Cambio estuvo presente y tuvo un impacto en la evolución de conceptos que finalmente se articularían en la definición de derivada, según Cauchy.

En cada periodo se indagará por el estatus de los otros conceptos que se han mencionado como constitutivos de la definición moderna de derivada según Cauchy. Por último en el cuarto periodo, manteniendo las mismas preocupaciones anteriores se explorará más allá de la definición de Cauchy para hacer visible el surgimiento de los conceptos de las derivadas de Carathéodory y Frechet.

4.2 Etapas de estudio de la evolución conceptual del concepto de derivada

La investigación de la evolución histórica del concepto de derivada que hemos realizado nos permitió identificar cuatro períodos de acuerdo a los diferentes planteamientos del problema relacionado con el estudio de la variación y el cambio.

4.2.1 Período T_1: Los griegos (384-190 A.C)

En este periodo no existen trazas del surgimiento del concepto de derivada, sin embargo, uno de los problemas más antiguo de la Geometría y por tanto de la Matemática en los cuales emerge uno de los conceptos constitutivos del concepto de derivada moderno, es el problema de encontrar las rectas tangentes y normales a una curva dada, problema que en los elementos de Euclides se abordó con relativo éxito, pues, el concepto de recta tangente es limitada solo a los círculos.

El concepto de derivada en su desarrollo histórico aparece relativamente tarde, a pesar que desde la época de los griegos se trabaja con conceptos constitutivos para la consolidación de este, como son el de recta tangente y curva entre otros. Es solo, hasta el siglo XVIII, cuando se reconoce como un objeto matemático. Por lo tanto el concepto de derivada no aparece como un concepto aislado, su desarrollo está ligado a la evolución de conceptos como los ya mencionados y otros conceptos como son: variación, infinitesimal, límite y continuidad. Con la excepción de los conceptos de función y razón de cambio, es posible encontrar, en las matemáticas griegas, sorprendentemente, indicios de la mayoría de los conceptos que hemos mencionado y cuyo surgimiento y evolución histórica convergen en el concepto de derivada. Podemos encontrar rastros de la problemática tangente–curva, del concepto de límite, del concepto de razón, y de planteamientos, en conexión con curvas y tangentes que, siglos más adelante, conducirían a la emergencia de la recta numérica y de la geometría analítica.

Es sabido que la historia de la matemática no tiene sus principios con los griegos, pero para dar un inicio a nuestro breve recorrido histórico resulta conveniente tomar a Grecia como punto de salida, sin desconocer y desvalorar el desarrollo de la matemática en otros pueblos de la antigüedad.

Nuestro propósito es desarrollar un análisis histórico-critico de los conceptos arriba mencionados de forma clara y sucinta. Para ello nos limitaremos a cuatro grandes estudiosos de este periodo:

Aristóteles (384-322 a.C)

Euclides (330-275 a.C.)

Arquímedes (287-212 a.C.)

Apolonio (262-190 a.C.)

Seguidamente presentaremos una riqueza de contenido teórico de algunos de los campos de trabajo de los autores que mencionamos, con el fin de obtener elementos para enriquecer nuestro estudio histórico-epistemológico del concepto objeto de estudio, la derivada. Iniciaremos esta documentación con Aristóteles.

4.2.1.1 ARISTÓTELES (384-322 a.C)

Aristóteles es considerado uno de los promotores más importantes del desarrollo de las matemáticas. A pesar de que no se le conoce ninguna contribución técnica notable a la matemática, sus teorías sobre la naturaleza de esta y sus relaciones con el mundo físico ejercieron gran influencia y se tomaron como punto de partida para la consolidación de conceptos como el de variación, infinito y continuo numérico entre otros, los que constituyen soportes del concepto moderno de derivada.

Como se mencionó antes, de Aristóteles no se conocen desarrollos puntuales sobre el concepto de derivada, pero se trabajan conceptos ligados a este como el concepto del infinito, el concepto de continuidad y fundamentalmente el estudio del movimiento, concepto transversal a la constitución moderna del concepto de derivada. En cuanto al movimiento, la doctrina aristotélica distingue dos tipos de movimientos: el movimiento natural y el movimiento forzado o violento. Todo movimiento se relaciona con la naturaleza de los cuerpos materiales, los cuales están constituidos por uno o por combinaciones de los siguientes cuatro elementos llamados simples: tierra, agua, aire y fuego. Aristóteles identifica además la necesidad de un “motor” como la causa del movimiento; la doctrina Aristotélica afirma que el movimiento en el vacío es imposible y caracteriza los dos tipos de movimientos naturales simples: el rectilíneo y el circular.

En la matemática griega un hecho de singular importancia tiene que ver con el infinito y el continuo, conceptos a los cuales les seguiremos el rastro durante los periodos mencionados anteriormente. Respecto al infinito sabemos que es uno de los conceptos fundamentales en la matemática y en particular en la construcción del concepto de derivada; sin embargo, su utilización ha sido causa de paradojas y problemas conceptuales. Por lo menos históricamente su aparición jugó un papel primordial desde la antigüedad griega, especialmente con la emergencia de las paradojas de Zenón y las magnitudes inconmensurables, cuestiones que mantuvieron inquieto el pensamiento griego durante un largo periodo.

Aristóteles hace una distinción importante en referencia al infinito que tiene vigencia aun en nuestros días. Entre el infinito potencial y el infinito actual, afirma que el infinito sólo existe como posibilidad, como ente en potencia y no como algo ya acabado. Las características finitas del hombre le impiden tener acceso al infinito como un todo. De esta forma le niega legitimidad al infinito actual (el infinito tomado en un acto) y sólo acepta el infinito potencial (el infinito como proceso).

Refiriéndose a la doctrina del infinito en potencia, Aristóteles dice:

> No afecta a la teoría matemática, puesto que los matemáticos no necesitan del infinito ni hacen uso de él, sino tan solo de magnitudes tan grandes como se quiera, pero finitas; y la división que se realice sobre una magnitud muy grande puede aplicarse en igual razón a otra magnitud cualquiera, de manera que ello no supone diferencia alguna para la demostración." (Physica,III,7,2076 27–34).

Respecto al concepto del concepto del continuo numérico, la definición de Aristóteles de continuo es la siguiente:

> Una cosa es continuo cuando los límites en los que se tocan dos partes sucesivas cualesquiera son uno y el mismo y están, como la palabra misma continuo implica, juntos (Kline, 1994, p. 84).

Esta idea se refiere a entes físicos; la continuidad es una propiedad que hace que extremos de dos cosas contiguas sean una misma cosa y se mantengan unidas.

Como se puede observar el *marco epistemológico* que condiciona los trabajos de Aristóteles respondió a la observación de las causas de los fenómenos, su aspecto cualitativo, más que el ¿cómo las cosas cambian?, su aspecto cuantitativo. La pregunta que define este marco epistemológico Aristotélico es:

¿*Cuáles son las causas de los movimientos*?

Y por ello no se preocupó por lo cuantitativo. Además, se constata la existencia del obstáculo epistemológico que, como señala Anna Sierpinska (1992), George Cantor denominó el «*horror al infinito*»:

«El horror al infinito es una forma de miopía que impide ver el infinito actual, aunque, en su forma superior este infinito nos haya creado y nos conserva y en sus formas secundarias transformadas él se manifiesta todo entorno de nosotros y va hasta habitar nuestros espíritus» (George Cantor, G, Gesammelte Abhandlungen, 1932) (Citado por Sierpinska, 1992, p. 39)

Según Aristóteles «los matemáticos no necesitan del infinito ni hacen uso de él» y ante la concepción de número como agregación infinita, pero no alcanzable por división infinita, una concepción del continuo numérico no estuvo a su alcance y lo continuo sólo se encuentra en lo geométrico, como concluye Delgado:

La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos de la época a aferrarse al continuo físico que era sugerido en la matemática por las magnitudes geométricas. Desde este último punto de vista, la geometría en lugar de los números, debería explicar el mundo. (Delgado, 1998, p. 172)

Esta parte del marco epistémico de los griegos explica el énfasis en el razonamiento lógico y el consecuente desarrollo de la Lógica Aristotélica y de la geometría, a la vez que la relegación de lo numérico de la matemática de la época.

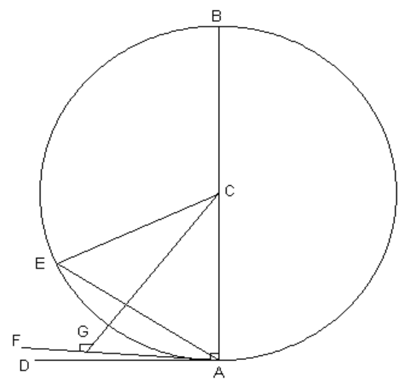
4.2.1.2 EUCLIDES (330-275 a.C.)

Los Elementos de Euclides son uno de los tesoros más valiosos de la matemática de todos los tiempos. Es una construcción conceptual para comprender soportes históricos de muchos conceptos de las matemáticas. En este apartado se aprovechara este tratado de los elementos para presentar un panorama sucinto de la evolución de conceptos, como el de la recta tangente a una curva, el concepto de infinito, el de continuo, el de límite, conceptos ligados a la evolución de la derivada y a su constitución actual.

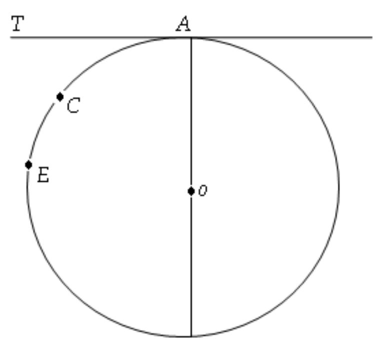
Si nos situamos en el libro III, de los Elementos, el cual contiene 37 proposiciones, comienza con algunas definiciones relativas a la geometría de los círculos y a continuación estudia las propiedades de las cuerdas, tangentes, secantes, ángulos centrales e inscritos, etc.

Euclides presenta la siguiente definición de tangente en la proposición 16:

> Proposición 16. La recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos caerá fuera del círculo, y no se intenpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo. (Kline, 1994, p. 101).



La novedad de este teorema reside en que Euclides toma en consideración el espacio Comprendido entre la tangente *TA* y el arco *ACE*



En esta definición, Euclides está incorporando el concepto de intersección unitaria de una curva particular (la circunferencia), y una recta (la tangente). Como se puede ver más adelante, muchos años después Arquímedes y Apolonio extenderán la noción a las cónicas. Pero éstas son curvas que no cambian de concavidad; en el caso de la hipérbola, se define para cada una de las ramas ignorando la otra. Sólo Arquímedes extiende el concepto a una curva diferente como lo es la espiral, en la proposición 13 de su tratado sobre las espirales.

En los elementos “el círculo se define como una figura plana circundada por una sola línea, que se llama periferia, respecto de la cual las rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocado en el interior de la figura son iguales entre sí”

En la definición III-2 de los elementos se afirma:

“Se dice que es tangente a un círculo la recta que, tocando el círculo

y siendo prolongada, no corta al círculo”.

Este concepto de tangente se mantendrá por mucho tiempo, incluso después de los griegos y en cierta forma constituirá un obstáculo epistemológico en el surgimiento de un concepto más general de tangente, en la medida que el concepto de curva evolucione.

Cuando se estudian *Los Elementos* de Euclides se ven diferenciados dos caminos teóricos, él primero, correspondiente a las magnitudes y el segundo, el que corresponde a los números. Muchos estudiosos de la historia han criticado a Euclides por “repetir” las mismas proposiciones del libro V, dedicado a las magnitudes y en el libro VII, dedicado a los números. Este cuestionamiento desconoce las bases teóricas que soportan la ontología aristotélica, en la cual es clara una brecha conceptual entre número y magnitud, y que lleva a establecer binomios duales: como la Aritmética– Geometría, el Discreto – Continuo, y el Finito – Infinito.

Las magnitudes están asociadas a la geometría, los números a la aritmética; las magnitudes son continuas mientras los números son discretos. Ello significa que las magnitudes pueden dividirse infinitamente, Esto hace referencia al continuo geométrico, mientras que en los números sólo existe la disgregación en una cantidad finita de partes. Aquí Euclides sigue los delineamientos de la física aristotélica respecto a la existencia del infinito. Los números se pueden dividir sólo de manera finita, sin embargo no podemos hablar de un conjunto infinito de números, por agregación. Igualmente no existe una magnitud infinitamente pequeña. Las magnitudes se pueden dividir indefinidamente, pero nunca se llega a un final. En resumen, Euclides adhiere a la idea de que no existe el infinito en acto sino sólo en potencia. Destierra el infinito actual y acoge el infinito potencial.

Respecto al concepto del continuo numérico, el tratamiento en los elementos es muy complejo, recogemos entonces la conclusión que hace Delgado (1998) en su tesis doctoral la cual afirma:

> Queda establecido que, los griegos no pensaron en un continuo numérico tal y como se define en nuestros tiempos, es decir, un conjunto compacto y conexo. Solamente Aristóteles define un continuo físico como se ha anotado, pero, en los Elementos de Euclides se encuentran referencias implícitas a las ideas que deben configurar el concepto de conjunto continuo. Sin embargo, "si se busca en Euclides el enunciado explícito de un principio de continuidad, no encontraremos nada**.** (Caveing y otros, 1988, p. 18).
>
> Algunos comentaristas de Euclides afirman que éste había captado intuitivamente la continuidad pero no enunció el principio de continuidad de la recta, necesario para algunas demostraciones deficientes en las que, por ejemplo, se requiere la existencia de puntos de intersección entre dos líneas. Maurice Caveing, argumenta contundentemente que el concepto de continuidad de la recta y la estructura del continuo están lejos de ser captados por la intuición ya sea ésta empírica o racional. (Delgado, 1998, p 175).

En lo que sigue daremos una mirada al concepto de razón en Euclides, noción que se utiliza inicialmente para la constitución del concepto de derivada en los siglos venideros, daremos una breve reseña de lo consignado en los libros V y VII, en los cuales Euclides presenta su teoría de proporciones y como señalamos arriba, en el libro V, la desarrolla de manera general para magnitudes y en el libro VII, lo hace para números. Esta separación de las dos teorías se debe básicamente a la naturaleza de los conceptos de número y magnitud.

Los conceptos básicos, empleados por Euclides, para comparar las magnitudes, son proporción y razón. A continuación se presentan las primeras definiciones del libro V de los Elementos.

Definición V.1: Se dice que una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.

Definición V.2: Se dice que una magnitud es múltiplo de otra menor cuando es medida por ella.

Euclides no definió lo que entiende por magnitud, sin embargo, se asume, que Euclides conserva la concepción Aristotélica de magnitud lineal, como un "pedazo" de recta continuo.

Definición V.3: Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad.

De esta manera, la razón entre dos magnitudes da cuenta de la relación cuantitativa entre ellas. La simbolización a:b es un avance, que prefigura el cociente moderno a÷b o $\frac{a}{b}$, el cual posee un status conceptual diferente a las "razones". Por lo tanto "razón" es un proceso de comparación entre magnitudes (segmentos, por ejemplo); pero no se constituye en sí misma como algo acabado. En contraste con esto, a pesar que consideramos la división como un proceso, sabemos hoy, que el cociente $\frac{a}{b}$ es a su vez un número.

Definición V.4: Se dice que dos magnitudes tienen razón, cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.

Esta definición es muy importante, pues se basa en la propiedad arquimediana, según la cual, si A y B son dos magnitudes (que pueden ser inconmensurables), entonces siempre existe un entero n tal que nA > B. Esta propiedad, como se conoce, significa que todos los segmentos son de un orden de magnitud comparable, es decir, que no existe ni una magnitud infinitamente pequeña ni una infinitamente grande, ni tampoco una magnitud de cantidad cero.

Definición V.5: Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda, es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.

Es la definición esencial del libro V, porque iguala relaciones cuantitativas de una manera operativa. Desde la actualidad, podemos decir que en ella se encuentra un esbozo de caracterización de los números reales positivos.

En términos modernos, la definición V.5 establece que si se tienen 4 magnitudes A, B, C y D, entonces A y B están en la misma razón que C y D - simbólicamente A : B = C : D -, cuando para todo entero n y m se establecen las siguientes implicaciones:

Si $nA > mB$ entonces, $nC > mD$

Si $nA = mB$ entonces, $nC = mD$

Si $nA < mB$ entonces, $nC < mD$

Definición V.6: Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales.

Definición que involucra el término proporción como igualdad entre razones.

4.2.1.3 ARQUIMEDES. (287-212 A.C.)

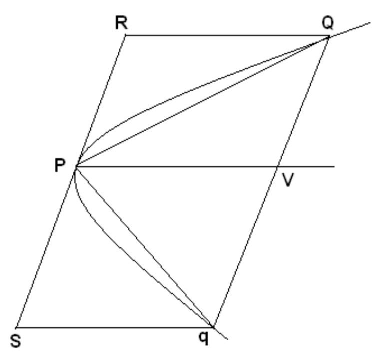
Fue un estudioso de las matemáticas, quien logró establecer un dialogo entre lo teórico y lo práctico sin prejuicio. Sus resultados son el ejemplo típico de una relación estrecha y persistente, entre el uso de un cuerpo abstracto, como el sistema euclidiano, y principios prácticos, ya sea de índole físico o mecánico. Puede decirse que con Arquímedes la ciencia griega alcanza su máximo florecimiento, porque si bien con Euclides la matemática antigua logró encontrar la manera de validar los enunciados a partir de una axiomática, fue Arquímedes quien, además de complementarla y perfeccionarla, logró una mayor flexibilidad al incorporar procesos heurísticos.

Arquímedes De Siracusa con sus trabajos fue quien más se acercó, entre los antiguos, al proceso de paso al límite: "*Él, más que ningún otro autor griego acercó la geometría a la mecánica y utilizó con gran ingenio argumentos geométricos para dar demostraciones*". (Kline, 1994, p. 233). Gracias a que imaginó las figuras geométricas como constituidas por segmentos de líneas o láminas delgadas, pudo desarrollar un método heurístico, dirigido por consideraciones físicas, que facilitaban el descubrimiento de proposiciones matemáticas. El nuevo conocimiento, obtenido mediante un razonamiento inductivo, posteriormente era demostrado rigurosamente por medio del método de exhaución," (Delgado, 1998, p.156) método que ilustraremos más adelante.

En su libro Cuadratura de la Parábola, Arquímedes da dos métodos para hallar el área de un segmento parabólico, lo demuestra con todo el rigor matemático. El procedimiento empleado es el del método de exhaución sin hacer referencia al infinito ni a los infinitesimales. El primer paso es probar que el segmento parabólico puede "agotarse" mediante una serie de triángulos.

Veamos en los siguientes renglones apartes de la demostración adelantada por Arquímedes:

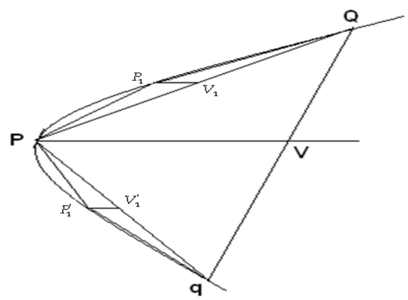
> Sea QPq el segmento parabólico y sea PV el diámetro que corta en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas a la base Qq del segmento y de manera que V es el punto medio de Qq. Es intuitivamente claro, y se demuestra en la proposición 18, que la tangente en P es paralela a Qq. A continuación se toman QR y qS paralelos a PV y entonces el triángulo QPq es la mitad del paralelogramo QRSq, y así el triángulo QPq es mayor que la mitad del segmento parabólico.



Como corolario de este resultado, Arquímedes demuestra que el segmento parabólico se puede aproximar mediante un polígono tan cercano al mismo como se quiera.

> Pues al construir un triángulo en el segmento limitado por PQ en el que P_1V_1 es el diámetro de ese segmento, y se demuestra por métodos elementales de geometría que el área del triángulo $PP_1'q$, construido sobre Pq tiene las mismas propiedades que el triángulo $PP_1'Q$ y suman juntos $\frac{1}{4}$ del triángulo PQq. Arquímedes aplica el método indirecto de

demostración, que completa la prueba por el procedimiento de aproximaciones sucesivas. Demuestra en primer lugar que dados n términos de una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{4}$. Se tiene $A_1 + A_2 + ... + A_n + \left(\frac{1}{3}\right)A_n = \left(\frac{4}{3}\right)A_1$ (Kline, 1994, p. 157).

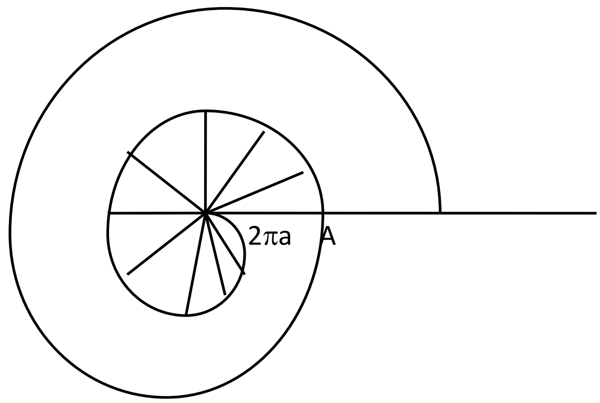


Nuevamente, está presente aunque en otro contexto el obstáculo de **“**horror al infinito**”** que rechaza la admisión del proceso de paso al límite como una operación matemática. Parece sorprendente que en este contexto numérico no haya prosperado la noción de operación matemática ligada a la situación para obtener un resultado. Mucho más, si tomamos en cuenta que aquí se realizan aproximaciones sucesivas, guiadas por la heurística, aparentemente cercanas a la operación con límites, en el sentido que permite descubrir el resultado (y no como ocurre en el método de exhaución donde se conoce previamente). (Delgado, 1998, p. 180).

En el trabajo Sobre Espirales Arquímedes define la espiral como sigue:

Imaginemos que una línea (rayo) gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo permaneciendo en un mismo plano, y un punto que, comenzando por el extremo fijo, se mueve a lo largo de la línea con velocidad constante; entonces el punto describirá una espiral. En la modernidad en coordenadas polares la ecuación de la espiral es $r = a\theta$

Esta definición es atípica en la geometría griega, la cual no se ocupa de la variabilidad y por el contrario sólo se estudian figuras estáticas. Como consecuencia, ellos no se aproximaron al concepto de función.



> Arquímedes parece haber hallado la dirección instantánea del movimiento resultante de los dos componentes por medio del paralelogramo de las velocidades, esta parece ser la primera vez que se determinó la tangente a una curva que no fuera una circunferencia.(Boyer, 1987, p. 173).

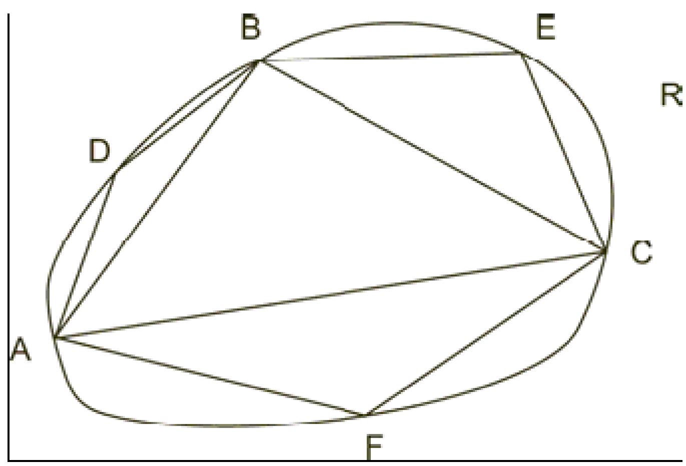
Podemos decir que los trabajos matemáticos de Arquímedes constituyen el punto de partida en el desarrollo del cálculo moderno, en el sentido de que en ellos se puede visualizar una primera respuesta general a problemas relacionados con el cálculo de áreas, longitudes, volúmenes y rectas tangentes. Los problemas de cuadraturas y rectas tangentes se evidenciarán en el próximo periodo como problemas subsidiarios uno del otro.

La espiral de Arquímedes es importante porque además de reafirmar su pensamiento científico en cuanto a la relación entre la geometría y la mecánica, también envuelve un aspecto dinámico. Sabemos que la geometría euclidiana es una geometría esencialmente estática, que busca condicionar el movimiento a través de un sistema axiomático, por ejemplo, el círculo se define como una figura plana circundada por una sola línea, que se llama periferia, respecto de la cual las rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocado en el interior de la figura son iguales entre sí; esta definición no involucra ningún tipo de movimiento, y los puntos aparecen estáticos, mientras en la definición de la espiral de Arquímedes ocurre lo contrario.

Para finalizar este apartado de Arquímedes se presenta a continuación su método exhaustivo.

La esencia matemática del método exhaustivo consiste en la sucesión de las siguientes operaciones, las cuales vamos a matizar tomando como referencia la figura siguiente, suponiendo que se va a "cuadrar" la figura no rectilínea ***R***.

Como se puede ver en la figura siguiente:



1. Se inscribe (circunscribe) una sucesión de figuras rectilíneas *A*1, A*2*, *AK*, *An*, cuyas Áreas crecen monótonamente. En este caso: *A1* = *ABC*, *A*2 = *ADBECF*, etc.

2. Las figuras se escogen de tal suerte que la sucesión *a*(*R*) - *a* (*A*1), *a*(*R*) - *a* (*A*2), *a*(*R*) - *a* (*An)*, cumpla con las hipótesis de X.1. de los *Elementos*.

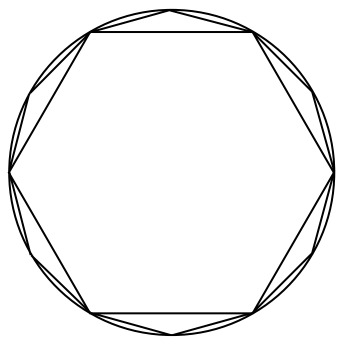
3. Con ayuda de consideraciones teóricas, se presume el "límite" en la sucesión de las Figuras inscritas, el cual se designa por *a*(*A*).

4. Se demuestra que el "límite *a*(*A*)", es igual al área buscada *a*(*R*). Esta demostración se realiza por reducción al absurdo:

   a. Se supone $a(R) > a(A)$, de lo cual $a(R) - a(A) > 0$, y por lo tanto, por el principio de Eudoxo, existe n tal que (n) $a(R) - a(A) < a(R) - a(A)$; Esto significa que (n) $a(A) > a(A)$, lo cual es imposible.

b. Se supone $a(R) < a(A)$, de lo cual $a(A) - a(R) > 0$, y por lo tanto, dado que la sucesión $\{a(An)\}$ tiene por límite A, se tiene que existe n tal que $a(A) - a(An) < a(A) - a(R)$, y de aquí se deduce que $n\, a(A) > a(R)$, lo cual es imposible.

Otro resultado clásico, usado por Arquímedes, consiste en demostrar que el área de un círculo se puede agotar por medio de polígonos inscritos; esto es, dado un círculo C y un número $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, existe un polígono P inscrito en C, tal que $a(C) - a(P) < \boldsymbol{\varepsilon}$, donde $a(C)$ corresponde al área del círculo C, $a(P)$ al área del polígono P, etc.



El método exhaustivo (exhaución) corresponde, teniendo el cuidado de evitar causalidades directas, al antecedente más importante del cálculo infinitesimal. Para finalizar, es importante no dejar pasar por alto la riqueza conceptual en los métodos infinitesimales de Arquímedes, los cuales sirvieron de base para los matemáticos de siglos posteriores, especialmente a Cavalieri y a Leibniz. Como se ha dicho, Arquímedes avanza en el problema del cálculo de áreas de figuras, traspasando la barrera euclidiana de las figuras rectilíneas. Aunque sus trabajos se restringen a cierto tipo de figuras particulares, y no hay un tratamiento general del área, ni del trazado de tangentes, su método trasciende estos casos y se erige como propuesta metodológica general para el cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco y tangentes.

4.2.1.4 APOLONIO (262-190 A.C.)

Apolonio (262-190 A.C) nació en Perga, y aprendió matemáticas con los sucesores de Euclides. Era tan elevada su actividad matemática que fue conocido como “el Gran

Geómetra". La obra maestra de Apolonio, es el tratado sobre las cónicas, aunque el tema fue estudiado antes por otros autores (Aristeo el viejo, Euclides, Arquímedes).

Apolonio fue el primero en basar la teoría de las tres cónicas en secciones de un mismo cono circular, recto u oblicuo y en dar cuenta de las dos ramas de la hipérbola, además fue quien pulió la teoría, despojándola de irrelevancias y le dio forma sistemática. Las *Secciones Cónicas* pueden considerarse como la culminación de la geometría griega clásica, adicionalmente después de construir las propiedades básicas de las secciones cónicas (ecuaciones para la parábola, elipse e hipérbola) se olvida del cono y deduce otras propiedades a partir de esas ecuaciones.

Para seguir con claridad el tratamiento que hace Apolonio de las cónicas, en particular lo que hace referencia al cálculo de las tangentes, consideraremos en primer lugar algunas definiciones y propiedades básicas de conceptos que todavía son importantes en la geometría moderna:

1. ***Diámetro de la cónica:*** Recta que pasa por los puntos medios de una familia de cuerdas[4] paralelas. Para el caso de la parábola, siempre paralela al eje de simetría. Para el caso de la hipérbola, un segmento que va de una rama a la otra.

2. ***Diámetro conjugado con el diámetro de la cónica:*** Recta que pasa por el punto medio de un diámetro paralela a la familia original de cuerdas. Corta en el punto medio a todas las cuerdas paralelas al diámetro de la cónica. Para el caso de la parábola no hay diámetro conjugado, ya que las cuerdas paralelas al diámetro son de longitud infinita.

3. ***Ejes:*** Para una elipse o hipérbola son dos diámetros conjugados perpendiculares entre sí. Para la parábola es un diámetro cuyas correspondientes cuerdas le son perpendiculares.

En el libro I de [2], Apolonio se ocupa de las tangentes a las cónicas. Define recta una tangente como:

---

[4] Cuerda: Segmento de recta que tiene dos puntos en común con la cónica.

Una recta que sólo tiene un punto en común con la cónica, permaneciendo cualquier otro punto fuera de ésta.

Muestra entonces que si se dibuja una recta pasando por un extremo de un diámetro P, que sea paralela a las cuerdas que corresponden a ese diámetro, caerá fuera de la cónica, sin que pueda haber ninguna otra recta entre ella y la cónica. Por lo tanto, la recta mencionada es la tangente a la cónica en P.

Otro teorema sobre tangentes asegura lo siguiente:

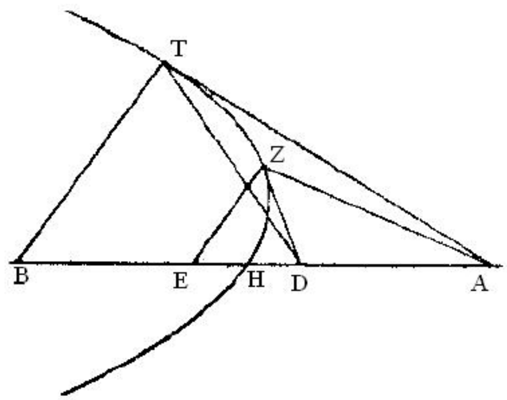
Libro 1: Proposición XXXIII.

1. Si tomamos un punto sobre una parábola, si de ese punto trazamos una recta en la dirección conjugada del diámetro, si encontramos sobre el diámetro, a partir del vértice, un segmento igual al formado por el punto sobre la parábola y la intersección de la recta conjugada y el diámetro, la recta que pasa por el segundo extremo del segmento y el punto sobre la parábola será tangente a la parábola.

Libro 1: Proposición XXXV.

2. Cuando una recta que encuentra un diámetro en el exterior de la sección es tangente a una parábola, la recta trazada de manera ordenada desde el punto de contacto sobre el diámetro, cortará sobre el diámetro, a partir del vértice de la sección, una recta igual a aquella que está situada entre el vértice y la tangente, y no habrá ninguna recta que caiga en el espacio comprendido entre la tangente y la sección.

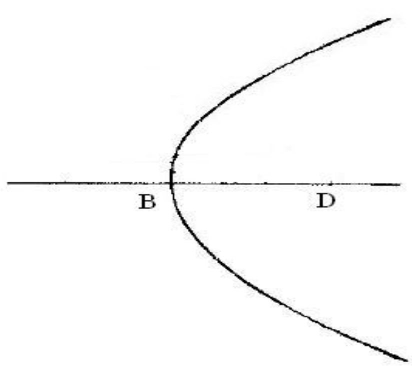
Veamos la construcción: Sea una parábola cuyo diámetro es la recta AB. Trazamos la recta BT de manera ordenada, tal que la recta AT sea tangente a la sección. Digo que la recta AH es igual a la recta HB. En efecto, si ella no lo fuese, pongamos la recta HE igual a la recta AH, tracemos la recta EZ de manera ordenada y la recta de unión AZ. Luego, la recta AZ prolongada encontrará la recta AT, lo que no puede suceder, puesto que los extremos de las dos rectas serían las mismas. Por consiguiente, la recta AH no es igual a la recta HB, luego ella le es igual.



Libro 2: Proposición XLIX.

3. Dados una sección de cono y un punto no situado al interior de la sección, trazar por ese punto una recta que toque la sección en un punto.

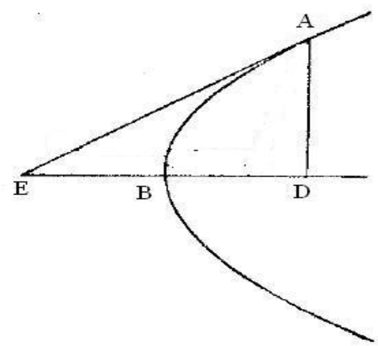
   Tomemos que la sección de cono sea primero una parábola cuyo eje es BD. Se trata de trazar desde un punto dado, no situado al interior de esta sección, una recta tal como la propusimos. El punto dado está situado sea sobre la línea (la sección), sea sobre el eje, sea en la región exterior restante.



Que el punto esté situado sobre la línea, y que sea el punto A. Que la tangente sea obtenida, y que sea la recta AE.

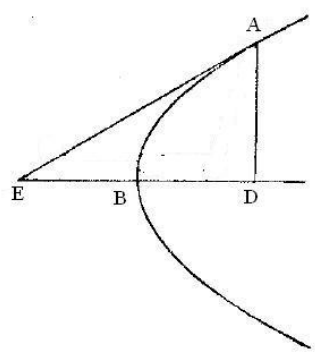
Tracemos la perpendicular AD (sobre el eje BD); esta recta estará determinada en posición. Además, la recta BE es igual a la recta BD (libro 1 pro. XXXV), y la recta BD está dada; entonces la recta BE está dada también. Además, el punto

B está dado; entonces el punto E también está dado. Pero el punto A está dado también; entonces la recta AE está dada de posición.



La síntesis será la siguiente: del punto A tracemos la perpendicular AD; coloquemos la recta BE igual a la recta BD, y tracemos la recta AE. Es evidente que esta recta es tangente a la sección.

Por otra parte, dado que el punto E este situado sobre el eje, tracemos la tangente AE, y tracemos la perpendicular AD. Entonces la recta BE es igual a la recta BD. Además, la recta BE está dada; entonces la recta BD está también dada. Además, el punto B está dado; entonces el punto D también está dado. Además, la recta DA es perpendicular; entonces la recta DA está dada de posición, y el punto A esta dado. Pero el punto E también está dado; por lo tanto la recta AE está dada de posición.

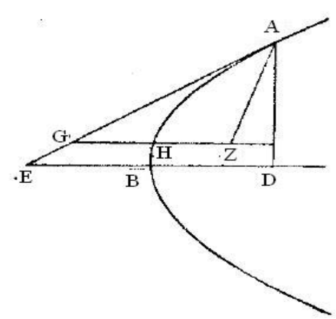


La síntesis será la siguiente: coloquemos una recta BD igual a la recta BE; tracemos del punto D la recta DA perpendicular a la recta ED, y tracemos la recta AE. Entonces es evidente que la recta AE es tangente.

Por otra parte está claro que si el punto dado es el mismo que el punto B, la perpendicular por B es tangente a la sección.

Finalmente, que el punto dado sea G; que la tangente sea trazada, y que sea la recta GA. Por el punto G, tracemos la recta GZ paralela al eje, es decir a la recta BD; la recta GZ está dada de posición.

Además, tracemos desde A la recta AZ de manera ordenada sobre el diámetro GZ, la recta GH será igual a la recta ZH (libro I prop XXXV).



Además, el punto H está dado; entonces el punto Z esta dado también. Finalmente, la recta ZA se trazó de manera ordenada, es decir que es paralela a la tangente en el punto H; por lo tanto la recta ZA está dada de posición. Por lo tanto, el punto A está dado también. Pero el punto T también está dado, entonces la recta TA está dada de posición.

La síntesis será la siguiente: por el punto G, tracemos la recta GZ paralela a la recta BD; coloquemos una recta ZH igual a la recta GH; tracemos la recta ZA paralela a la tangente en el punto H, y tracemos la recta AG. Por lo tanto es evidente que el problema está resuelto.

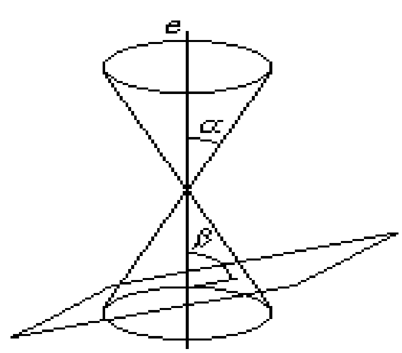
(Kline, 1994, pp.

La definición de recta tangente en Apolonio.

> Una recta tangente es una recta que sólo tiene un punto en común con la cónica, permaneciendo cualquier otro punto fuera de ésta, se extiende la noción de recta tangente a las cónicas.

Con Apolonio el número de curvas institucionalizadas en el discurso matemático crece, se consolida, con las cónicas, pero su legitimidad como "curvas" se mantiene dentro de la misma postura epistemológica respecto de la existencia de objetos matemáticos. Es decir los objetos matemáticos existen, solo en la medida en que pueden ser construidos con regla y compás. Por tanto, se amplía el número de "curvas" aceptadas como tales pero en realidad no se extiende ni el concepto implícito de curva, ni el concepto explícito de recta tangente.

En Apolonio se hace explicito un criterio para la descripción de una curva plana que empieza a marcar sus inicios, de un lado la curva algebraica y de otro, complementario con este, de coordenadas cartesianas, que están en la base del dialogo de la geometría y el álgebra. Las curvas trabajadas por Apolonio se conocen con el nombre de "lugares sólidos", curvas que en principio se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano, como se muestra en la gráfica.



Estas curvas después son conocidas como las cónicas y en ellas estudia sus propiedades geométricas, introduciendo una terminología técnica para clasificar el tipo de cónica. Apolonio fue el primero en obtener todas las curvas a partir de las secciones del cono recto, variando el ángulo de inclinación del plano con respecto al eje del cono y a partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental, una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado en la curva. Llama particularmente la atención la formulación de las secciones cónicas por Apolonio quien a la vez las estudia aproximándose de una forma sorprendente al estudio de coordenadas

Es sin duda que Apolonio aporta, en sus "Elements de coniques", no solo una impresionante cantidad de resultados nuevos, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales puede encontrarse el germen lejano de la geometría analítica del siglo XVII. A este respecto se ha dicho y se suele repetir con frecuencia, que Apolonio es el primero que utiliza un sistema de coordenadas para sus demostraciones geométricas. Sin embargo hay que anotar que las curvas tanto en Arquímedes, generadas por movimiento, como en Apolonio, como intersecciones de superficies, sus variables son segmentos de recta, entes geométricos, y no números que se relacionan analíticamente. Las curvas son *lugares geométricos*. Esta concepción constituiría, como lo señala Anna Sierpinska (1992), un obstáculo epistemológico a la noción de curva como una función.

4.2.2 Análisis del periodo $T_{1:}$ el período de los griegos antiguos (384-212 A.C)

Después del breve recorrido histórico en este periodo y siguiendo el modelo de Toulmin en su análisis transversal, longitudinal y su desarrollo evolutivo, señalaremos algunos progresos de conceptos que son soporte del concepto de derivada de hoy. Presentamos entonces un análisis evolutivo de los conceptos que consideramos nucleares en la constitución del concepto de continuidad y de derivada, respondiendo algunas preguntas referentes a:

A) La innovación o variación conceptual.

B) Los procedimientos de selección.

C) La relación entre el cambio conceptual y unidad de la disciplina.

4.2.2.1 La innovación o variación conceptual

Después de este breve recorrido histórico es claro que en este primer periodo de los griegos, estos se preguntaron y pretendieron dar respuesta al cuestionamiento: ¿Qué relación existe entre lo discreto y lo continuo? y en la intención de acercarse a una solución a dicho cuestionamiento aparecen innovaciones conceptuales que señalaremos en adelante:

Marco epistémico asociado a la geometría: La geometría Euclidiana que dominó por muchos siglos las matemáticas era esencialmente estática y local centrada en las propiedades de las figuras que se interpretaban como representaciones sugeridas por el mundo sensible, característica que se evidencia claramente en *Los Elementos* de Euclides, donde se observa el rigor de una demostración deductiva, pero donde las «transformaciones geométricas» no fueron consideradas. Esta característica, del marco epistémico, se mantuvo durante todo el período Griego a pesar de las anticipaciones de las curvas mecánicas de Arquímedes y los esbozos de coordenadas de Apolonio y su método para descubrir propiedades de las curvas. Tampoco, en esta época, se desarrolla la idea de calcular áreas de las curvas agotando la aproximación con sumas de áreas conocidas que sería la idea embrionaria del cálculo infinitesimal. Los fenómenos cinemáticos no fueron incorporados. La geometría de los griegos, a pesar de las anticipaciones de las curvas mecánicas de Arquímedes, no desarrolló el concepto de «transformación geométrica»..

C(g). Continuidad: El concepto de continuidad en *Los Elementos* solo es reconocido en las magnitudes geométricas y no se halla ningún tipo de afirmación explicita del concepto de continuidad y se designa al número para representar lo discreto y la geometría para lo continuo. Este concepto es bastante abstracto y poco intuitivo, en este periodo podemos concluir que los griegos no pensaron en un continuo numérico tal como se define en la actualidad, pero se muestra en Arquímedes una lenta variación a este concepto, el cual, para Arquímedes, es sugerido por los sentidos ligado a la mecánica y generado por el movimiento.

Cu(g). Curva: Él concepto de curva fue muy limitado, las curvas no se definen como curvas en el sentido moderno, es decir hay una definición del concepto de curva por extensión, y el conjunto está constituido por aquellas que pueden ser trazadas mediante un proceso de construcción con regla y compás o por intersección de superficies. Los conceptos de curva y recta tangente tuvieron una presencia limitada en la matemática Griega; este binomio tangente–curva aparece institucionalizado en *Los Elementos* de Euclides, pero la definición de tangente está restringida a la circunferencia.

En el desarrollo de *los Elementos* de Euclides, de los trabajos de Apolonio y de los de Arquímedes permiten concluir que los griegos se plantearon el problema de identificar el conjunto de las "curvas" , y que se prescribían mediante regla y compás, y que, en este proceso, se llegó a cuestionar el concepto implícito de curva, que se desprendía del paradigma impuesto por Euclides (Curva como contorno o frontera de algo que se podía construir con regla y compás) y que en alguna medida se confrontó también el marco epistémico, paradigma matemático dominante, no solo en lo que respecta a la naturaleza de los objetos matemáticos (construibles con regla y compás) sino también a la manera de concebir la relación matemática – mundo físico

O(g) Ontología: La relación matemáticas–mundo físico siempre ha estado presente en las distintas etapas históricas y civilizaciones, pero hay una diferencia fundamental en la manera como se plantea dicha relación. Sin embargo no hay evidencia de que el concepto de tangente que institucionalizó en *Los Elementos* haya sufrido variación alguna al concepto que usa Arquímedes y esto es visible en el método que utiliza para identificar tangentes en distintos procesos de cálculo.

C.I(g). Indivisible. Respecto a los otros conceptos que hemos mencionado como constitutivos de la definición moderna de derivada según Cauchy, nos referimos inicialmente al concepto de indivisible en Euclides y en Arquímedes, concepto en el cual podemos encontrar las semillas del concepto moderno de límite y del concepto de infinito, Euclides adhiere a la idea de que no existe el infinito en acto sino sólo en potencia. Los números son infinitos porque son inagotables; es decir, dado un número determinado siempre es posible generar otro, a partir de la adición de la unidad, igualmente no existe una magnitud infinitamente pequeña, las magnitudes se pueden dividir indefinidamente, pero nunca se llega a un final.

4.2.2.2 Los procedimientos de selección.

Respecto a los procedimientos de selección de la época, por medio de los cuales se aceptan o rechazan ciertas variantes conceptuales podemos concluir que en este periodo y en particular en Aristóteles, uno de los factores que determinan una variación conceptual es negar la legitimidad al infinito actual (el infinito tomado en un acto) y sólo se acepta el infinito potencial (el infinito como proceso). El potencial evoca la posibilidad de superación, por ejemplo todo número natural admite un sucesor, porque siempre podemos añadir 1 y obtener un nuevo número, lo que hace que la lista de los números sea ilimitada. El infinito potencial está ligado al procedimiento, la acción y la dinámica. El infinito actual es la consideración de la totalidad con todos sus elementos, por ejemplo, el conjunto de los Naturales.

El método de las *sumas finitas* que permitía *conjeturar* el valor que se deseaba calcular utilizado por Arquímedes es la forma operatoria de la noción matemática de paso al límite que se utiliza actualmente (sin embargo hay que dejar claro, según Boyer (1959, p. 52) que el número así obtenido se sometía a una validación razonando, lógicamente, en una doble reducción al absurdo.) Este método demostró ser útil y por ello fue aceptado en la comunidad matemática. Por medio de este método se calculó el área del círculo, el volumen de la pirámide, el cono, el cilindro y la esfera. La toma de conciencia del método de exhaución, en el proceso de pasar de lo operativo a lo conceptual fue largo, producto de la actividad y reflexión de la comunidad matemática del momento.

La limitación a tener un sistema simbólico desarrollado de tal manera que se pudiera acceder a las ideas implícitas en los desarrollos operativos fue de gran impulso a la variación conceptual del concepto del continuo numérico y de gran ayuda al proceso de selección de conceptos emergentes como el de curva, entre otros.

Y por uno de los factores que se evidencia en la época y aporta a los procesos de selección es el horror al infinito evidente en el método de exhaución.

4.2.2.3 La relación entre el cambio conceptual y unidad de la disciplina

En este periodo los cambios conceptuales dieron las bases para la génesis de tres ramas fundamentales en la Matemática: Logística, Aritmética y Geometría, ramas con sus propios objetivos y dificultades.

4.2.3 Periodo T_2: Siglos XVII-XVIII

Los siglos XVII-XVIII: son una etapa en cuyo transcurso se crea la geometría analítica, paso importante en la solución del divorcio entre geometría y aritmética provocado por las controversias griegas respecto a los conceptos de infinitesimal, continuo y variación entre otros. Se define por primera vez el concepto de función y con ello el concepto de derivada moderno empieza a hacerse explícito.

En este apartado nuestra intención es seguir desarrollando un análisis histórico-critico de los conceptos arriba mencionados de forma clara y sucinta durante este periodo, para ello nos limitaremos a grandes estudiosos de la matemática en esta época, los cuales desempeñaron un papel principal en la evolución de los conceptos en estudio, centrando nuestra atención en la evolución del concepto de recta tangente y en el concepto de derivada. Entre los matemáticos que destacamos en esta época encontramos:

Pierre De Fermat

Rene Descartes

Isaac Newton.

Gottfried Leibniz.

Leonard Euler.

En este periodo surgió la necesidad de responder a fenómenos ligados a las leyes que regían el movimiento de los planetas, también se buscaba resolver el problema práctico de navegación marina a gran escala. Es por esto que el estudio del movimiento reclamaba superar la mera descripción que Aristóteles realiza en su *Física sin interesarse en las variables mismas*, surgiendo así el problema de la variación. La pregunta que orienta la investigación de la épocaen este nuevo marco epistémico es:

¿*Qué es lo que cambia* en los fenómenos que expresan una variación de estado?

La determinación de las diversas posiciones de una trayectoria con las variaciones del tiempo, conduce directamente al concepto de relación entre variables (la posición varía con respecto al tiempo), que luego daría paso a una de las nociones más importante en las matemáticas, como es la noción de función.

De esta forma, la palabra "variable" guarda cercanía con las variaciones de una cantidad respecto a la variación del tiempo, que luego se generalizan en la cuantificación de otros conceptos como el de área y el de volumen. Con el problema de variación y la recuperación de las técnicas infinitesimales que puso en escena la relación entre los indivisibles y el continuo geométrico, surge el debate entre la concepción Paripatética de un infinito sólo en potencia, (que reconoce lo infinitamente grande y niega lo infinitamente pequeño), frente a la concepción de un infinito actual que trabaja exitosamente con infinitesimales. No obstante, no se posee una idea de su significado matemático. Estos conceptos, en principio, están implícitos en la solución de los grandes problemas que abordará el Cálculo: **las tangentes y las cuadraturas.**

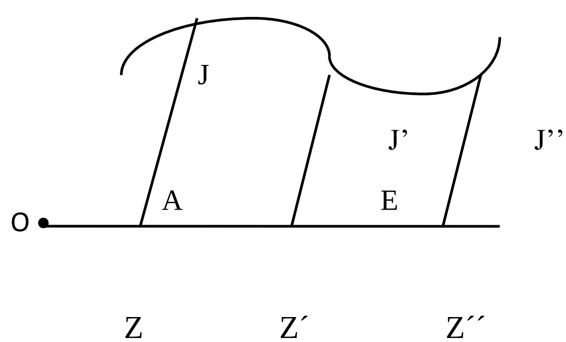
Entre los factores que contribuyeron en este período al desarrollo y evolución del concepto de derivada, además de los ya anotados podemos mencionar el desarrollo simbólico del álgebra, la ampliación del campo numérico, los avances en los métodos generales para el estudio de curvas, y la evolución del marco epistémico. Se debe destacar la construcción de la geometría analítica con su idea central de asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies y los métodos de demostración y la aplicación del álgebra. Iniciaremos nuestro estudio histórico-crítico de esta época recogiendo información de los trabajos de los matemáticos arriba mencionados, comenzando con Pierre Fermat.

4.2.3.1 PIERRE DE FERMAT (1601-1665)

Fermat, lo mismo que Descartes, estaba interesado en hallar métodos generales para el estudio de curvas, consientes de realizar este estudio mediante métodos cuantitativos crearon una disciplina conocida hoy con el nombre de geometría analítica

Fermat para sus investigaciones sobre curvas tomó como referente inicial los geómetras griegos, sobre todo Apolonio. Avanzando sobre el estudio de los lugares geométricos cosa que los matemáticos griegos no alcanzaron a desarrollar. A pesar de no conocerse de cómo evolucionaron las ideas de Fermat sobre la geometría analítica, se cree que lo más posible es que tradujese los trabajos de Apolonio a una forma algebraica. Se conocen asomos de que hacia la segunda década del siglo XVII ya poseía los elementos generales de la geometría analítica, incluso de una manera mucho más cercana a la nuestra en muchos aspectos, como en el hecho de que tomaba los ejes coordenados perpendiculares.

> Fermat consideraba una curva cualquiera y un punto genérico J sobre ella como se muestra en la gráfica. La posición *J* viene fijada por una longitud *A*, medida desde un punto *O* sobre una línea de base a un punto *Z* y la longitud *E* de *Z* a *J*. Fermat emplea así lo que llamamos coordenadas oblicuas, aunque no aparece explícitamente ningún eje de las *y*, ni se emplean coordenadas negativas, sus *A* y *E* son las *x* e *y* que usan en nuestra modernidad para designar los ejes coordenados en el plano cartesiano. (Kline, 1994, pp. 402-403)



El principio general era enunciado por Fermat, según cita de Kline, de la siguiente manera:

> Siempre que en una ecuación se hallen dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, cuyo extremo describe una línea recta o curva [citado por Kline, 1994, p.402]

Así en los extremos *J, J´, J´*... de *E* la figura anterior en sus diferentes posiciones describe la "línea". Sus cantidades desconocidas *A* y *E* son variables en el sentido de Vieta[5] como letras que representan una clase de números. Esta manera de relacionar ecuaciones y curvas amplió el número de curvas conocidas que antes se reducían a las curvas griegas que se obtenían por regla y compás "curvas planas", las secciones cónicas "curvas sólidas" y todas las demás que llamaban lineales. Así además de asociar a las cónicas una ecuación, llegó a afirmar que las ecuaciones de primer grado en A y en E representan siempre una recta en tanto que las de segundo grado tienen cónicas como lugares geométricos.

> En su *Methodus ad Disquiriendam Maximan et Minimam* (Método para hallar máximos y mínimos, 1673), introdujo las curvas $y=x^n$ e $y=x^{-n}$. (Kline, 1994, p.403)

Para Fermat la necesidad de dar solución a problemas científicos de la época, lo llevaron a generar aportes significativos al cálculo, a la construcción de tangentes y obtención de máximos y mínimos, como también grandes aportes de primer orden a la óptica.

4.2.3.1.1 El Método de las Tangentes de Fermat

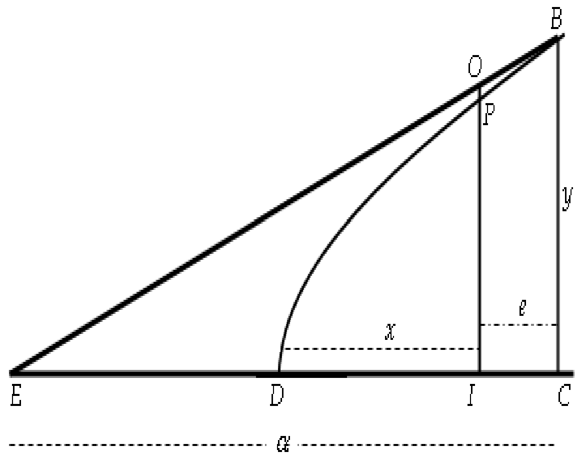
En el Methodus hizo Fermat una caracterización de la tangente a la parábola y la presentó como una aplicación de su método de máximos y mínimos. (Grattan-Guinness, 1984, pp. 42)

---

[5] **Francisco Vieta** fue un matemático francés (Fontenay-le-Comte, 1540-París, 1603). Se le considera uno de los principales precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras.

.

Sea una parábola DB de eje DC como en la figura;



Fermat trata de hallar la tangente en *B:* supongamos que es *BE* y sea *EC* la subtangente. Fermat toma un punto arbitrario *O* sobre *BE* y traza *IO* paralelo a la ordenada *BC;* sea *P* el punto de intersección de *IO* con la parábola.

De la desigualdad $IO > IP$ y de la propiedad de la parábola

$$DC : DI \quad = \quad CB^2 : IP^2 ,$$

Se sigue que

$$DC : DI \quad > \quad CB^2 : IO^2$$

Y debido a que los triángulos *EIO* y *ECB* tenemos que

$$CB^2 : IO^2 = EC^2 : EI^2$$

Así:

$$DC : DI \quad > \quad EC^2 : EI^2$$

Sea ahora $DC = x$ (x es conocida, ya que el punto B es el punto de tangencia dado inicialmente), sea $EC = a$ (La cantidad desconocida) y $IC = e$ por lo tanto la última desigualdad se convierte en:

$$x:(x-e) > a^2:(a-e)^2$$

O bien

$$xa^2 + xe^2 - 2xae > xa^2 - a^2e$$

Fermat sustituye esta desigualdad por la adigualdad

$$xa^2 + xe^2 - 2xae \approx xa^2 - a^2e \text{ ,}$$

Y usando por último el mismo método para el cálculo de máximos y mínimos obtiene $a = 2x$, y con ello queda determinada la tangente. Seguidamente se ilustra el método de Fermat para calcular los máximos y mínimos.

4.2.3.1.2 El Método de Fermat para los Máximos y Mínimos

El método de Fermat es el primer método general conocido para determinar máximos y mínimos el cual presentaba una característica notable que evolucionaría más adelante, y era la idea de dar un incremento a una magnitud que se podría interpretar como la variable independiente.

"Método Para investigar máximos y mínimos". El método comienza con la frase siguiente: "La teoría entera de la determinación de máximos y mínimos se basa en dos posiciones expresadas mediante símbolos y esta única regla". Y la regla es la siguiente:

I. Sea *A* un término relacionado con el problema.

II. La cantidad máxima o mínima esta expresada en términos que contienen solo potencias de *A.*

III. Se sustituye *A* por *A* + *E*, y el máximo o el mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E.

IV. Las dos expresiones del máximo o el mínimo se hacen *"adiguales"*, lo que significa algo así como "tan aproximadamente iguales como sea posible".

V. Los términos comunes se eliminan.

VI. Se dividen todos los términos por una misma potencia de E de manera que al menos uno de los términos no contenga a E.

VII. Se ignoran los términos que aun contienen E

VIII. Los restos se hacen iguales. Y la solución de la última ecuación nos dará el valor de A que hace que la expresión tome un valor máximo o mínimo relativo.
(Grattan-Guinness 1984. p. 38)

Fermat ilustraba su método mostrando la solución a la siguiente situación:

Hallar el punto E del segmento CD que hace máxima el área del rectángulo $DE \cdot EC$

Solución

Supongamos en este caso $CD = b$ y llamamos x a la A de Fermat y e a la E de Fermat, de manera que $CE = x$, por lo tanto tenemos entonces que hacer máxima la expresión $x(b-x)$. Siguiendo el método de Fermat tenemos:

$$(x+e)(b-(x+e)) \approx x(b-x)$$

($\approx$) Símbolo que representa la relación de *adigualdad.* Simplificando términos comunes a los dos miembros se tiene:

$$be \approx 2xe + e^2$$

Dividiendo por e se tiene:

$$b \approx 2x + e$$

Por último si ignoramos a el término e obtenemos que $b = 2x$.

Resultado conocido que afirma: “El rectángulo de perímetro fijo de mayor área es un cuadrado”.

Como se puede observar en el método no se utiliza ningún concepto de límite, es puramente algebraico, además Fermat no pensaba en una cantidad como una función y adicionalmente no se reconocía a *e* como si fuese un infinitesimal.

4.2.3.2 RENÉ DESCARTES (1596-1650)

En el periodo de los griegos las disciplina de la aritmética y de la geometría vivían caminos aislados, cada una con sus propios objetos y sus propios procesos operativos, sus progresos fueron lentos y sus aplicaciones limitadas. La geometría analítica junto con el refinamiento de los símbolos en el álgebra se convertiría en un instrumento eficaz para la obtención de relaciones abstractas por medio de un razonamiento deductivo.

Descartes en su momento hizo críticas tanto a la geometría euclidiana, como también autocríticas hacia el álgebra que tan extendida halló, respecto a la geometría afirma:

“*Que solo puede ejercitar el entendimiento a condición de fatigar grandemente la imaginación*”

Y respecto al algebra, por estar está completamente amarrada a reglas y formulas afirma:

> El álgebra resulta un arte lleno de confusión y oscuridad e idóneo para estorbar, y no una ciencia útil para el desarrollo de la mente (Kline, 1994, p.408).

Es en este sentido que Descartes, para corregir las limitaciones tanto del algebra como de la geometría, toma lo mejor de cada una de ellas e inicia una aplicación del algebra a la geometría, evidenciando la potencia del algebra y su superioridad sobre los métodos geométricos de los griegos, trabajando en la creación de una metodología con mayor cobertura y con un valor agregado en el proceso de mecanización de los razonamientos y la reducción del desarrollo en la resolución de los problemas. Descartes aplicó a la geometría los métodos y resultados del álgebra; convirtió un problema geométrico en un problema algebraico, el producto de esta aplicación del algebra a la geometría fue su libro *La Geometrie*. Este libro trata una gran variedad de temas e inicia con una introducción a la geometría analítica y sin duda la notación y las ideas expresadas en este libro tuvieron gran influencia positiva en el desarrollo del cálculo.

Durante el siglo XVII el cálculo estuvo ligado estrechamente a las investigaciones relacionadas con curvas, esto debido a la falta de institucionalización del concepto de variable o más aun el concepto de función. Como hemos mostrado en este resumen histórico las primeras curvas que se han estudiado son las curvas heredadas por los griegos: el círculo, las cónicas, y la espiral de Arquímedes. A medida del recorrido del siglo, aparecieron otras curvas, para mencionar algunas tenemos la cicloide, las parábolas e hipérbolas de orden superior $((y^m = kx^n \ y \ ky^m x^n = 1)$ respectivamente, siendo m y n números naturales y k una constante. En este periodo después de las cónicas las curvas más estudiadas fueron la cicloide, el ovalo y la espiral de Galileo, estas tres últimas curvas muestran la influencia mutua entre la física y la matemática.

Descartes inicia su libro *La Geometrie* con problemas geométricos con el uso del algebra, a la manera de Vieta y solo de forma muy lenta va emergiendo la idea de ecuación de una curva. En el libro II, Descartes critica la diferencia que los griegos hacían entre curvas planas, sólidas y lineales.

“Estos habían llamado:

- Curvas planas a las constructibles con regla y compás.
- Curvas sólidas eran las secciones cónicas.
- Curvas lineales eran todas las demás. Como la concoide, la espiral, la cuadratiz y la cisoide.”(Kline, 1994, p.413)

Afirma Descartes “*incluso la recta y el circulo requieren algún instrumento*” y sobre estas bases rechaza la idea de que solo son legítimas las curvas constructibles con regla y compás y propone nuevas curvas engendradas por construcciones mecánicas. Concluye con la siguiente afirmación:

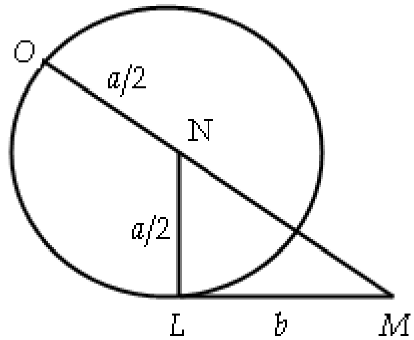
> De que las curvas geométricas son las que pueden expresarse mediante una única ecuación algebraica (de grado finito) en x e y, con lo que acepta la concoide y la cisoide, mientras que llama mecánicas a todas las demás curvas, como la espiral y la cuadratriz (Kline, 1994, p.413).

Descartes llega a la resolución de ecuaciones a través de los problemas geométricos, los cuales clasifica en planos, sólidos y lineales. Los problemas planos se refieren específicamente a los problemas de la geometría euclidiana que se pueden resolver como intersecciones de círculos y rectas. Los sólidos son los que se resuelven a través de las cónicas y los lineales son los que requieren curvas más compuestas.

La manera como Descartes da solución a estos problemas corresponde a uno de los ejemplos más categóricos de aplicación del método analítico, veamos como resuelve la ecuación general de segundo grado, esta ecuación, según Descartes, pertenece a la rama de los problemas planos que se pueden resolver con los instrumentos euclidianos de regla y compás. O más exactamente, los problemas que se pueden encontrar con intersecciones de círculos y rectas.

Supongamos, por ejemplo, que un problema geométrico nos lleva a hallar una longitud desconocida x y que la formulación algebraica indica que x debe satisfacer la ecuación de segundo grado $x^2 = ax + b^2$, donde a y b son longitudes conocidas, para ello sigue el siguiente proceso: se traza la circunferencia de centro N y radio $\left(\frac{a}{2}\right)$

Por el punto L se traza la tangente LM y se une el punto M con el centro N y se prolonga, de tal suerte que corte a la circunferencia en el punto O. De esta forma se obtiene el triángulo rectángulo NLM de Lados $\left(\frac{a}{2}\right)$ y b



Llamando a $OM = x$, entonces, según Descartes, la línea que resuelve el problema geométrico se puede expresar como:

$$OM = ON + MN = \left(\frac{a}{2}\right) + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

Descartes no da la prueba de que *OM*, es la longitud correcta, que es inmediata hoy al utilizar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *NLM*.

> Descartes dio un paso fundamental al ampliar el concepto de curva admisible, No sólo no admitía curvas anteriormente rechazadas, sino que ensanchaba su dominio, pues dada cualquier ecuación algebraica en *x* e *y*, puede obtenerse una curva y generar así curvas totalmente nuevas" (Kline, 1994, p.413)

Esta amplificación del concepto de curva permitió la aplicación del método de coordenadas con toda generalidad, así lo hicieron Newton y todos los matemáticos siguientes. El mérito más significativo de geometría analítica fue dotar a la ciencia del uso matemático que estaba necesitándose y que se había iniciado a exigir abiertamente en el siglo XVII con las herramientas cuantitativas.

> Por una parte, los conceptos geométricos podían ser formulados algebraicamente, y los objetivos geométricos podían alcanzarse por medio del álgebra. Recíprocamente, al interpretar geométricamente los enunciados algebraicos puede lograrse una visión más intuitiva de su significado, lo cual puede, a su vez, ser fuente de nuevas conclusiones" (Kline, 1994, p.426)

Las curvas se consideraban como generadas por el movimiento del punto extremo de un segmento vertical u oblicuo que se desplaza sobre una línea horizontal.

Además de las curvas conocidas, otras nuevas se introdujeron como *curvas generadas por el movimiento*. El antecedente lo encontramos en la cuadratriz y en la espiral de Arquímedes, pero en la época griega las curvas asociadas a movimientos estaban fuera de los límites de la matemática legitima.

Como señalamos anteriormente del estudio del movimiento obtuvieron las matemáticas un concepto fundamental, que fue eje central en prácticamente todo el desarrollo de los trabajos de los siglos siguientes, el concepto de función o relación entre variables. Muchas de las funciones introducidas durante el siglo XVII fueron estudiadas en primer lugar como curvas, esto por el hecho de que el concepto de función no se había institucionalizado, para mostrar un ejemplo el caso de la funciones trascendentes elementales tales como $\log x$, a^x y $sen\, x$. La curva seno apareció en la matemáticas como la curva asociada a la cicloide.

> Mersenne, en 1615, definió la cicloide (que era conocida anteriormente) como el lugar geométrico que describe un punto (fijo) de una rueda que gira sobre el suelo. Galileo, que había demostrado que la trayectoria de un proyectil disparado en el aire formando un ángulo con respecto al suelo es una parábola, consideró la curva como el lugar geométrico que describe un punto móvil" (Kline, 1994, p.447)

La separación que hizo Descartes entre curvas geométricas y mecánicas origino la diferencia entre funciones algebraicas y transcendentes. Luego aparecieron muchas funciones transcendentes al efectuar operaciones incluidas en el cálculo. En el siglo XVII aparece la definición más explícita del concepto de función y fue dada por James Gregory en su *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura (1667)*

> Definió una función como una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable. (Kline, 1994, p.447)

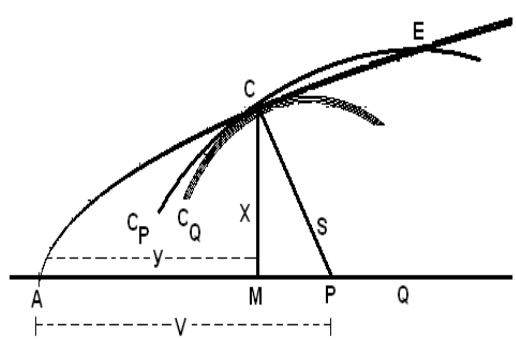
Los problemas que ocuparon a los matemáticos respecto a las curvas fueron, el de hallar tangentes, áreas de superficies, y valores de máximos y mínimos, se estudiaron también algunos problemas inversos al de las tangentes y por último la rectificación de arcos de curvas. Seguidamente mostramos como calcula Descartes las tangentes a una curva determinada.

4.2.3.2.1 El Cálculo de las Tangentes en Descartes

Como es conocido en la antigüedad griega solo se concebían aquellas curvas que se describían por un movimiento continuo del compás y la regla o aquellas que resultan de interceptar figuras conocidas. Descartes multiplica los movimientos del compás obteniendo nuevas curvas. Para Descartes es claro que al habla de curvas se debe describir sus propiedades. Justamente las llamadas curvas mecánicas son excluidas porque no existe manera de conocer sus propiedades a través de procedimientos específicos. Al contrario de estas, las curvas construidas por su mecanismo articulado se pueden representar mediante ecuaciones algebraicas; para ellas existen procesos que permiten el trazado de sus normales y tangentes.

El método seguido por Descartes para la determinación de la normal es el siguiente:

Supongamos dada la curva algebraica *ACE*



Y se desea trazar la normal a la curva en el punto C de coordenadas $(x_0,\ y_0)$. Siguiendo su método Descartes supone que la recta CP es la solución del problema. Se designa:

$$CM = x, \quad AM = y, \quad AP = v, \quad CP = s.$$

Para explicar el proceso, Descartes utilizaba siempre casos particulares, por razones de conveniencia supondremos que la curva está dada por la siguiente ecuación en notación moderna:

$$x = f(y)$$

Además de la curva, Descartes consideraba el círculo c_p con centro en *P* y que pasa por *C*, es decir, el círculo con ecuación:

$$x^2 + (v - y)^2$$

La circunferencia de este círculo toca la curva CE en C sin cortarla, mientras que la circunferencia c_Q con centro en un punto Q distinto de P y que pasa por *C*, cuya ecuación es:

$$x^2 + (v_Q - y)^2 = s_Q{}^2$$

Cortará a la curva no solo en *C* sino también en algún otro punto; sea este punto *E*. Esto significa que en la última ecuación sustituyendo $x = f(y)$ se tiene:

$$(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - s_Q{}^2 = 0$$

La cual tiene dos raíces distintas; pero "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia entre las dos raíces, y al final, cuando los dos puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por *C* toque la curva en el punto *C* sin cortarla". Así pues, el análisis ha conducido a Descartes a la conclusión que *CP* será una normal a la curva C cuando *P* (es decir v) este determinado de tal manera que la ecuación

$$\left(f(y)\right)^2+(v-y)^2-s^2=0$$

Tenga dos raíces iguales a y_0. Utilizando conceptos modernos significa que esta condición conduce directamente a la expresión:

$$v-y_0 = f'(y_0)\cdot f(y_0)$$

Para la subnormal *MP*.

Descartes dio ejemplo de su método hallando, entre otras cosas la normal a una elipse en un punto. Veamos esto: sea una elipse de la forma,

$$x^2 = ry-\frac{r}{q}y^2$$

La ecuación correspondiente según lo anterior es,

$$y^2+\left(\frac{rq-2vq}{q-r}\right)y+\frac{qv^2-qs^2}{q-r}=0$$

La cual tiene dos raíces iguales a y_0 cuando

$$\frac{rq-2vq}{q-r}=-2y_0 \qquad \text{y} \qquad \frac{qv^2-qs^2}{q-r}=y_0{}^2$$

Como el punto C esta dado, y hemos obtenido el valor de y_0, se puede obtener el valor de la subnormal a través de la ecuación:

$$v-y_0=\frac{r}{2}-\frac{r}{q}y_0$$

En este método es evidente que Descartes evitaba el uso de los infinitesimales y trabajaba solo con un proceso algebraico, además el método en principio es aplicable a curva algebraica sencilla, el método se complica por los cálculos laboriosos que hay que desarrollar para determinar ***v*** comparando los coeficientes.(Grattan-Guinness, 1984, pp. 32).

4.2.3.3 ISAAC NEWTON (1642-1727)

En la obra de Newton se pueden distinguir algunos temas centrales que guiaron su interés matemático y que son pertinentes para el alcance del objetivo I de nuestra propuesta de investigación, como son por ejemplo: los desarrollos en series, el tratamiento algorítmico del problema de las rectas tangentes y de las cuadraturas, la concepción de las variables como expresión de un movimiento en el tiempo y la teoría de las razones primeras y últimas.

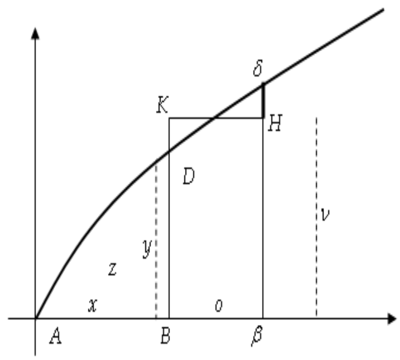
En cuanto a los desarrollos en series de potencias, Newton rescataba la importancia de estos, debido a que suministraban un método para reducir las formulas analíticas de expresar las curvas a una forma canónica en la que todos los términos consistían en un coeficiente constante por una potencia de la variable. De esta manera podrían ser representadas, mediante ecuaciones muchas más sencillas tanto las curvas transcendentes, como las curvas algebraicas, resaltando eso sí que con un número infinitos de términos. El más famoso resultado es el llamado "teorema binomial" o "binomio de Newton", al cual llegó durante los años 1664 y 1665.

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2 + \dots \binom{n}{k} a^k x^{n-k} + \dots x^n$$

En esta última expresión ***n*** representa un número natural, el objetivo principal de Newton en este sentido era generalizar este resultado, al caso $(a+x)^{\alpha}$ donde $\alpha = \frac{p}{q}$. Este resultado fue descubierto en el contexto de la cuadratura del círculo[6] $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Newton comparó las cuadraturas que se obtenían para exponentes en los números naturales, que eran fáciles de calcular, y extrapoló esta idea para el caso de exponentes racionales obteniendo la cuadratura del círculo $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

[6] Ver, Grattan-Guinness, 1984, pp. 76-78

En el mismo tratado da un método para hallar la relación entre la cuadratura de una curva y su ordenada. En este método se muestra claramente que Newton se dio cuenta de la relación inversa que hay entre la integración y la diferenciación en los términos que hoy conocemos. Veamos el método, supone que tiene una curva y como la de la figura



y que el área bajo la curva, *ABD*, es *z* donde

$$z = ax^{\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

y el exponente puede ser entero o racional. A un incremento infinitesimal de *x* lo llama momento de *x* y lo representa con *o*. En la figura se asigna:

$AB=x$ $B\beta = o$ y $BK= v$ tales que las áreas $BKH\beta$ y $BD\delta\beta$ sean iguales, donde el área del paralelogramo $BKH\beta = ov$. Entonces

$$z+ov = a(x+o)^{\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Aplica el teorema del binomio al segundo miembro, obteniendo una serie infinita cuando α es fraccionario, resta (1) de (2), divide por *o*. Considera Bβ «infinitamente pequeño», en cuyo caso, como muestra la figura *v* se hace igual a *y*, y los términos que aun contienen o desaparecen, con lo que resulta

$$y = a\alpha x^{\alpha-1}$$

Que en el lenguaje actual indica que la derivada de la función del área bajo la curva en *x* es el valor de la función *f* en x. Recíprocamente, si la curva está dada por $y = a\alpha x^{\alpha-1}$, el área encerrada por ella es $z = ax^{\alpha}$. Conocido en la modernidad como "El Teorema Fundamental del cálculo".

> Newton vio claramente que los problemas de la cuadraturas deberían enfocarse de esta manera inversa: si se calcula la *y* para cada función algebraica z, se podrían determinar todos los tipos de curvas (*y*, *x*) que se pueden cuadrar. Y de hecho, determinó muchas de tales curvas cuadrables, coleccionándolas en largas listas que constituyen así nada menos que las primeras tablas de integrales. (Grattan-Guinness, 1984, p.78)

Tomemos como ejemplo la curva para la cual

$$z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Es decir (elevando al cuadrado para obtener la ecuación polinómica)

$$z^2 = \frac{4}{9}x^3$$

Siguiendo el método se tiene

$$(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$$

De donde

$$z^2 + 2zov + ov^2 = \frac{4}{9}\left(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3\right)$$

Sustituyendo $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, simplificando y dividiendo los dos miembros de la expresión resultante por ***o*** se obtiene

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}\left(3x^2o + 3xo^2 + o^3\right)$$

Toma Newton ahora $B\beta$ "Infinitamente pequeño", en cuyo caso muestra la figura, se hace $v = y$ y los términos que contienen *o* desaparecen, en lo que resulta

$$2zy = \frac{4}{3}x^2$$

Sustituyendo el valor inicial de *z*, se obtiene:

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

> El elemento fundamental en el método anterior consiste en el hecho de sustituir en la ecuación dada incrementos "pequeños" ***o*** y ***ov*** para *x* y *z* respectivamente. En el estudio de determinación de máximos y mínimos, tangentes y curvaturas Newton utilizaba este método, hasta desarrollar algoritmos para tratar estos problemas, dicho en términos modernos diseñó algoritmos para encontrar la derivada de cualquier función algebraica. (Grattan-Guinness, 1984, pp. 80)

Después de obtener este resultado, Newton estableció la regla para calcular la integral de una suma de funciones que, en términos de hoy, se expresa diciendo que la integral indefinida de una suma de funciones es la suma de cada una de las integrales de las funciones. Así, expresando las expresiones algebraicas en series de potencias calculó integrales, extendiendo la integración término a término a las series.

Hasta este momento, Newton había empleado como elemento fundamental de su método los «momentos» o «incrementos pequeños» *"o"* y *"ov"* para *x* y *z*, respectivamente, pero no hay una definición explícita de ellos y se interpretan de diferentes maneras: "cantidades infinitamente pequeñas", o "indivisibles" o "infinitesimales". Estos incrementos de las variables, eran tan pequeños que se podían despreciar, pero no eran nulos puesto que se podía dividir por ellos.

> Los momentos son cantidades infinitamente pequeñas, indivisibles o infinitesimales. La lógica de lo que hizo Newton no está clara, por supuesto. Dice en este trabajo que su método está «explicado brevemente más que demostrado con precisión»" (Kline, 1994, p.477-478)

Newton tratará de obviar esta falta de precisión en una obra más extensa titulada *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, escrito en 1672 pero que se publicó en 1736. Allí reformuló los algoritmos que había diseñado para calcular la derivada de las curvas algebraicas y sus demostraciones para expresarlos en términos de "*fluentes"* y "*fluxiones"*.

> En este trabajo dice que considera sus variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de elementos infinitesimales, como en el artículo anterior. Ahora, una cantidad variable la llama fluente y a su cambio relativo fluxión". (Kline, 1994, p.478)

4.2.3.3.1 El cálculo de fluxiones de Newton

Newton consideraba las cantidades de su geometría analítica como fluentes, es decir cantidades que varían con respecto al tiempo y al cambio con respecto al tiempo lo llamo la fluxión. Las fluxiones eran notadas con la variable y un punto en su parte superior. Así, si *x*, *y*, *z* son fluentes entonces sus fluxiones son: $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, Respectivamente. El método para resolver el problema de obtener las relaciones de las fluxiones conocidas las relaciones entre los fluentes es básicamente el mismo. Por ejemplo, si los fluentes están dados por la ecuación

$$y = x^n \qquad \textbf{(1)}$$

Newton deja fluir *x* e *y*, para obtener

$$y + o\dot{y} = (x + o\dot{x})^n \qquad \textbf{(2)}$$

desarrolla el segundo miembro mediante el teorema del binomio, resta (1) de (2), luego divide por o y desprecia los términos que aún contienen o obteniendo, finalmente, la relación entre las fluxiones

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} \qquad \textbf{(3)}$$

En la terminología moderna, este resultado se puede interpretar como

$$\frac{dy}{dt} = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}$$

y utilizando la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}$$

Con lo cual (3) se expresaría:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Lo novedoso en la justificación, es que los “momentos”, $o\dot{y}$ e $o\dot{x}$ Ya no son cantidades fijas o agregados o indivisibles. Ahora, representan cantidades que aumentan o disminuyen continuamente con respecto al tiempo. Pero, aún, siguen siendo cantidades «infinitamente pequeñas». Newton, no define las fluxiones (el cambio de x respecto al tiempo, el cambio de y respecto al tiempo).

Veamos el proceso presentado en el ejemplo usado por Newton mismo:

Sea la ecuación,

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo por los incrementos respectivo se tiene:

$$\left(x+\dot{x}o\right)^3-a\left(x+\dot{x}o\right)^2+a\left(x+\dot{x}o\right)\left(y+\dot{y}o\right)-\left(y+\dot{y}o\right)^3=0$$

Desarrollando los binomios, simplificando, dividiendo por *o* y finalmente despreciando los términos en los que este presente el factor *o*, la expresión se reduce a:

$$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=0$$

De la cual se puede obtener el cociente diferencial,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3x^2-2ax+ay}{3y^2-ax}$$

Desde una mirada moderna, el último cociente, corresponde a la razón de las derivadas parciales de la función en dos variables $f(x,y)=x^3-ax^2+axy-y^3$.

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\frac{f_x}{f_y}$$

Y efectivamente, esta relación está implícita en los algoritmos que desarrolló Newton para resolver problemas de tangentes, máximos y mínimos y curvaturas.

En su *Tracattus de Quadratura Curvarum* (tratado sobre la cuadratura de las curvas), un tercer artículo sobre el cálculo, escrito en 1676 pero publicado en 1704, Newton observa los inconvenientes de trabajar con infinitesimales y propone una teoría que reformula el cálculo en términos de lo que él denominó "primera y última razón" con la cual, según él, no tendría que recurrir a los infinitesimales.

"Critica ahora el despreciar términos que incluyen *o* porque, según dice:

«En matemáticas no se deben despreciar los errores más diminutos...Considero las cantidades matemáticas en este punto no como consistentes en pequeñas partes, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas están descritas, y por tanto generadas, no por la yuxtaposición de partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de líneas; los ángulos por la rotación de los lados; las porciones de tiempo por un flujo continuo...

> Las fluxiones son, hasta la aproximación que queramos, como los incrementos de las fluyentes generados en tiempos iguales y tan pequeños como sea posible y, para hablar con precisión, están en la razón primera de los incrementos emergentes; aunque pueden expresarse mediante líneas cualesquiera que sean proporcionales a ellos.»” (Kline, 1994, p.480)

Aquí, el concepto fundamental es el de fluxión, la velocidad de cambio de una variable que se considera aumentando o disminuyendo continuamente en el tiempo, pero en los cálculos lo que realmente interviene es la razón de las fluxiones: “las fluxiones están en la razón «primera» o «última» de los incrementos nacientes o evanescentes”. Para Newton la razón primera surge de considerar la razón entre los incrementos, de las variables x e y, cuando ambos aumentan desde cero. La última razón se obtiene cuando los incrementos disminuyen ambos hacia cero. Así la razón de las fluxiones es igual a la última o primera de las razones de los incrementos «nacientes» o «evanescentes».

Obviamente el concepto de límite está implícito en este razonamiento, no se resuelve la cuestión de la existencia de la razón última o primera:

“...la formulación dada, tal como lo está, deja importantes resquicios a la duda, ya que en tanto los incrementos existen, su razón no es su razón última, y cuando han dejado de existir no tiene ninguna razón entre sí en absoluto. Así, pues, también se presenta aquí una cuestión de fundamentos a saber:

FQ 3: ¿Existen las razones primeras o últimas? (Grattan-Guinness, 1984, p.118)

4.2.3.4 GOTTRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716)

Con Leibniz y Newton hay un cambio de perspectiva con respecto al cálculo de áreas y a la construcción de la recta tangente a una curva en un punto determinado. A estos dos grandes estudiosos se les reconoce que vieron el cálculo como un método nuevo y general, aplicable a muchos tipos de funciones, ambos aritmetizaron el cálculo, trabajaron en él conceptos algebraicos. Es conveniente recordar cómo se presentó anteriormente que Descartes planteó una primera salida general al problema, vía restricción a las curvas algebraicas. Los métodos algebraicos dominaron durante muchos siglos en matemáticas sin que se pueda hablar del análisis como disciplina independiente. A continuación se presentan las ideas principales en la obra de Leibniz en cuanto a la invención del cálculo.

Entre las ideas centrales de Leibniz en la concepción de su cálculo destacamos en primer lugar "su idea filosófica que le lleva a indagar más por los métodos que por los resultados. Su interés era construir un simbolismo adecuado que permitiera encontrar procedimientos y fórmulas generales, mediante el cual se pudieran escribir todos los procesos de argumentación y de razonamientos" (Delgado 1998, p. 210). Un ejemplo en particular se evidencia al estudiar la geometría de curvas donde hacía énfasis en la manera de transformar los métodos en algoritmos que pudieran llevarse a cabo por medio de fórmulas, es decir lo que pretendía era un cálculo para tratar los problemas geométrico-infinitesimales.

La segunda de estas ideas fundamentales se refiere a las sucesiones escritas que se conocen hoy como una serie telescópica, el descubrimiento de la propiedad de la suma de términos de sucesiones constituidas por diferencias de términos consecutivos de una sucesión dada. Veamos sea:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n \ldots$$

Una sucesión, definamos ahora

$$b_1 = a_1 - a_2, \qquad b_2 = a_2 - a_3, \qquad b_3 = a_3 - a_4, \ldots$$

y la suma se calcula directamente por

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n \quad = \quad a_1 - a_{n+1}$$

Lo que significa que las sucesiones de diferencias se podían sumar fácilmente, resultado que Leibniz usó para resolver el problema que Huygens le planteara en 1672, consistente en hallar la suma de la serie,

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots$$

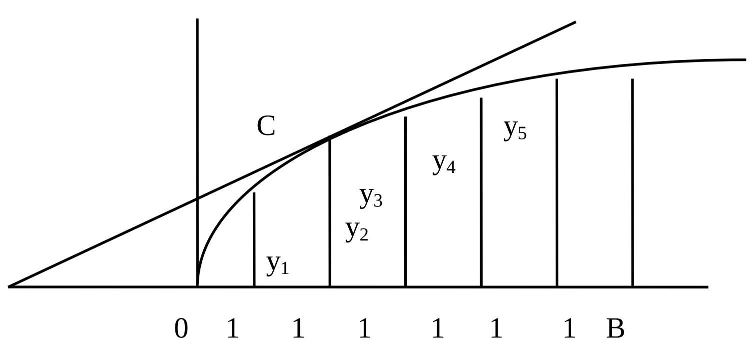
Multiplicando la suma por $\frac{1}{2}$ se tiene:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

Leibniz descubrió que los términos de la última serie se podían reescribir como diferencias de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

La última serie es telescópica y tiene suma 1, por tanto la propuesta para Huygens tiene como suma 2. Estos resultados no eran del todo nuevos, pero hicieron que Leibniz se percatara que el formar las sucesiones de diferencias y las sucesiones de sumas eran operaciones inversas una de la otra. Esta idea adquirió todo su significado cuando se aplicó a la geometría. Leibniz define una sucesión de ordenadas equidistantes y. Si su distancia es 1, la suma de las ordenadas da una aproximación de la cuadratura de la curva *y* la diferencia entre dos ordenadas sucesivas nos da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente.

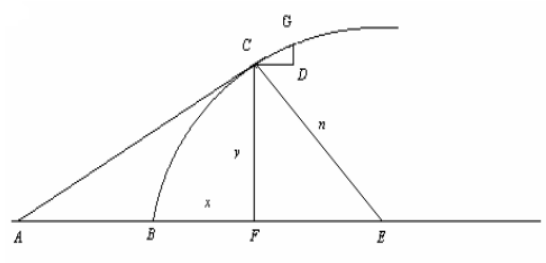


> Más aún cuando más pequeña se elija la unidad 1, mejor es la aproximación. Leibniz dedujo de esto que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas; en este caso la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de las ordenadas sucesivas. De esta manera, de la reciprocidad de las operaciones de tomar sumas y diferencias, sacó Leibniz la conclusión de que las determinaciones de cuadraturas y de tangentes eran también operaciones inversas la una de la otra." (Grattan-Guinness, 1984, p.85-86)

Así pues la segunda idea principal de Leibniz, "en su planteamiento general se ve que sugería ya un cálculo infinitesimal, de sumas y diferencias de ordenadas mediante el cual podían ser determinadas cuadraturas y tangentes y en el que estas determinaciones aparecieran como procesos inversos. De esta manera encontró las reglas básicas de diferenciación e integración e introdujo un simbolismo apropiado para ejecutar los procedimientos. Así, asignó los símbolos "**d**" para la diferencial y "$\int$**"** para la suma o integración como más tarde los hermanos Bernoulli denominarían a la operación, caracterizó la relación inversa de estos símbolos y algunas reglas para utilizarlos" Delgado, 1998, p.211.

"La tercera idea principal fue relativa al uso del conocido "Triangulo Característico", en la comprensión del problema de las cuadraturas. La importancia del pequeño triangulo Δ *CGD* situado a lo largo de la curva en la figura es que aproximadamente es semejante a los triángulos formados por la ordenada, la tangente y la subtangente." (Grattan.Guinnes, 1984, p. 86)

En primer lugar, identifiquemos algunas propiedades del triángulo característico de acuerdo a la representación de la figura siguiente:



El punto ***A*** corresponde al origen de coordenadas, el punto ***C*** tiene coordenadas (***x, y***),

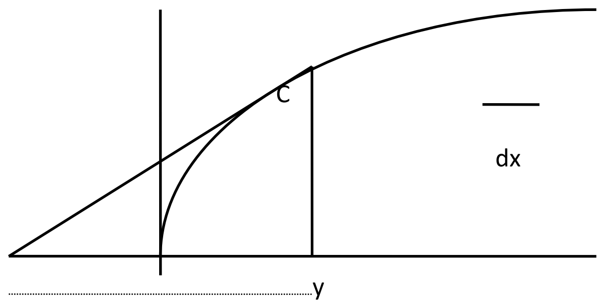
AC es la tangente a la curva ***BCG, CE = n*** es la normal correspondiente, ***CF = y*** es la ordenada y perpendicular a ***AE.*** Δ***CGD*** es el triángulo característico, de la figura se tiene que los triángulos ΔFCE y ΔCDG son semejantes, por lo tanto,

$$CG \cdot y = CD \cdot n \text{ y por lo tanto } \sum CG \cdot y = \sum CD \cdot n ,$$

Donde el primer término se interpreta como el momento total del arco de la curva con respecto al eje ***x***; el segundo término corresponde a la cuadratura formada de las normales trazadas a lo largo del eje ***x***. "(Grattan-Guinness, 1984, p.86)"

Por lo anterior se observa que Leibniz ha planteado el problema en términos de diferencias y sumas de una manera que se nos antoja simple, con un simbolismo moderno y un proceso sencillo; pero la verdad es que este paso no fue inmediato, Leibniz tuvo que trabajar más o menos dos años para llegar a estos resultados. Resumiendo brevemente las características principales del nuevo cálculo de Leibniz, en el cual ya aparecen los conceptos de diferencial y de suma, los símbolos ***d*** y $\int$, su relación inversa y la mayor parte de las reglas para utilizarlos en las fórmulas.

"La diferencial de un variable *y* es la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de la variable, […] así ***dy*** es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas ***y*** sucesivas, mientras que ***dx*** es la diferencia infinitamente pequeña entre dos abcisas ***x*** sucesivas…" También definió la diferencial geométricamente. […] introduce un segmento finito llamado ***dx*** como se muestra en la gráfica



define a partir de él *dy* como el segmento que satisface la proposición

$$y : \sigma = dy : dx$$

Siendo σ la longitud de la subtangente, o equivalentemente

$$dy = \frac{y}{\sigma} dx$$

Es decir el diferencial *dy* es un segmento finito." (Grattan-Guinness, 1984, pp. 95-96).

4.2.3.5 LEONARD EULER (1701-1783)

Euler fue un científico sumamente productivo; el índice de su obra comprende más de 800 trabajos de investigación, publicados principalmente en las revistas de las más prestigiosas academias científicas en toda Europa. Aunque él no tenía obligaciones regulares de enseñanza, fue el autor de influyentes libros de texto sobre una gran variedad de temas como cálculo diferencial e integral, mecánica, balística, acústica, la astronomía, la teoría de la música y la construcción naval.

Euler contribuyó con conceptos y métodos nuevos al desarrollo creciente de las matemáticas en este periodo, adicionalmente ordenó y unificó el nuevo campo matemático "*El Análisis*" en tres grandes obras:

- *Introductio in analysin infinitorum* (introducción al análisis de los infinitos, 1748),
- *Institutiones calculi differentialis* (tratado sobre el cálculo diferencial, 1755) e

- *Institutiones calculi integralis* (tratado sobre el cálculo integral, 1768-1770)

En el principio el cálculo era inseparable de la geometría, de tal manera que en la época de los Bernoulli y de l'Hôpital, las teorías de Leibniz se fueron desarrollando

> El cálculo consistía en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas y los objetos principales que se manejaban eran *cantidades geométricas variables* tal como aparecían en esos problemas" (Grattan-Guinness, 1984, p.102)

Sin embargo, según se fueron haciendo cada vez más complicados los problemas que se abordaron y las fórmulas más intrincadas, el origen geométrico de las variables se fue haciendo más lejano y así el cálculo se fue convirtiendo en un trabajo sobre fórmulas. En esta transición del cálculo inseparable de lo geométrico, al cálculo que se ocupa de funciones, los libros de Euler desempeñaron un papel fundamental. En la *Introductio*, se define por primera vez en una obra el concepto de función. Para Euler este concepto es el organizador de todos los demás conceptos del cálculo.

Euler vino a reforzar esta transición al asegurar explícitamente que el *Análisis* es una rama de la matemática que trabaja con *expresiones analíticas* y especialmente con *funciones*, el concepto de función, tal como se moviliza actualmente en los cursos de matemáticas es un objeto que pasó por un proceso muy lento y muy elaborado para su consolidación, en los primeros inicios Euler definía función de la manera siguiente:

> "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números o cantidades constantes"[7]

Euler en su obra *"Introducutio in anlysis infinitorum"*, escrita en 1744 y publicada en 1748 introduce además del concepto de función, las definiciones de las nociones iníciales, como constante y cantidad variable

[7] *Itroductio in analysin infinitorum*, 1784, Vol I, p.4. (cittado por Grattan-Guinness, 1984, p.102)

> Según Euler, una constante es una cantidad definida tomando siempre el mismo valor, mientras que una variable es introducida como un conjunto (a veces un subconjunto) de números complejos.
>
> Una cantidad variable, escribe Euler, es una cantidad indeterminada o, si se prefiere, una cantidad universal, que comprende todos los valores determinados.
>
> De ese modo, prosigue él, una cantidad variable comprende todos los números en ella misma, tanto positivos como negativos, los números enteros y fraccionarios, aquellos que son racionales, trascendentes, irracionales. No se debe excluir el cero ni los números imaginarios

Para Euler el término "analítica" indicaba las operaciones admisibles en la expresión. Estas eran las operaciones algebraicas usuales e incluían los procesos de paso al límite. La importancia de la definición es que señala claramente cuáles son las operaciones por las que se obtienen funciones. Así, esta definición incluye, los polinomios, las funciones que se obtienen por series infinitas, y las funciones trascendentes, además los coeficientes constantes pueden tomar valores complejos.

Como afirma Delgado, (2003, p.215) conviene una precisión. La noción de *"definición analítica"* sufrió una lenta institucionalización. Primero, debido a que en principio las funciones se manejaban intuitivamente, y de algún modo experimental, en las aplicaciones en las que intervenían cantidades variables, y segundo, por la confusión introducida por Descartes que expulsó de la geometría toda curva que no tuviera una definición analítica precisa, restringiendo el término *analítica* únicamente a las operaciones algebraicas como procedimientos válidos en tal definición.[8] Sin embargo, poco a poco, y a veces por caminos indirectos diversas operaciones trascendentes, como el logaritmo, la exponencial, las funciones trigonométricas, las cuadraturas, la resolución de ecuaciones diferenciales, el paso al límite, las series, van ocupando su lugar, sin que sea fácil para cada una de ellas indicar el momento preciso en que se da el paso.

[8] Bourbaki, 1

> Para encontrar la noción general de expresión analítica hay que llegar hasta Gregory, que la define en 1667[9] como una cantidad que se obtiene a partir de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas «*o de cualquier otra operación imaginable*», e intenta precisar esta noción en su prefacio[10], explicando la necesidad de añadir a las cinco operaciones del álgebra[11] una sexta operación, que no es otra cosa en definitiva que paso al límite. (Bourbaki, 1972. pp. 267-268)

En consecuencia con la visión algebraica de función, la atención de los matemáticos en el estudio de éstas se focalizó en las formas de representación más que en una relación entre variables en la cual la variable dependiente debe ser determinada unívocamente por la variable independiente.

Respecto a la continuidad de una función en Euler y sus contemporáneos era una noción centrada en la forma, es decir, en su representación algebraica (analítica), más que referida a una propiedad numérica entre las variables.

> Por función continua, Euler, como Leibniz y otros pensadores del siglo XVII, entendía una función especificada por una fórmula analítica; su término «continua» significa en realidad «analítica» para nosotros, excepto en lo que se refiere a una discontinuidad excepcional como en $y=1/x$. (Kline, 1994, p.540)

En Euler la continuidad se identificaba por la invariabilidad de la ley analítica en todo el dominio de definición de la función. En tanto que, la discontinuidad implicaba un cambio de la ley analítica. Euler llamó, por esta razón, "mixtas" a las curvas discontinuas, para significar que estaban definidas por más de una ley analítica.

---

[9] *Christiani Hugenii, Zullichemii Philophi vere magni, Dum viveret Zelemii Toparchae, Opera...,* 4 tomos en 1 vol., Lugd, Batav., 1751. (p 413)

[10] Ídem, pp. 408-409.

[11] Se trata de las cuatro operaciones racionales y de la extracción de raíces de orden cualquiera; J. Gregory no dejó nunca de creer en la posibilidad de resolver por radicales las ecuaciones de todos los grado. (nota de Bourbaki)

Youschkevitch (1976, pp 40-47) afirma, que debido a los argumentos de naturaleza física respecto a la solución del problema de la cuerda vibrante, se llegaba a que las soluciones generales de la ecuación en derivadas parciales, no se pueden expresar por una única ley analítica. A este resultado había llegado D'Alambert en 1746 y el propio Euler en su artículo *"Sobre la oscilación de cuerdas"* de 1748, había propuesto que en la solución pueden ser admitidas las curvas de forma arbitraria; es decir, las funciones que no pertenecen a la clase de funciones "mixtas" y generalmente, según Euler, no se acomodan a ninguna ley analítica. Se requería entonces una precisión de aquello que se entendía como función. Euler, observa entonces que su definición de función de la *Introductio,* que sólo admitía como tales a las expresadas por una ley analítica, era demasiado restrictiva pues dejaba fuera las curvas arbitrarias.

En el prefacio de su «*Institutiones calculi differentialis*», Euler modifica la definición de función que había dado en el volumen I de la *Introductio* expresando noción en términos de la relación entre las variables:

> Si unas cantidades dependen de otras de tal modo que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas; esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por las otras. Si, por consiguiente, x designa una cantidad variable, entonces todas las otras variables que dependan de *x* no importa de qué manera, o que son determinadas por *x*, son llamadas funciones de *x*.

Esta definición es más amplia e incluye las funciones "mixtas" y en general funciones arbitrarias. No obstante que esta definición libera el concepto de función de la focalización algebraica, facilitando el acceso al paso al límite como método aplicado a las funciones, la definición original del concepto es tan fuerte en Euler que, como anota Youschkevitch,

> Sin embargo, en la misma obra, consagrada al cálculo diferencial, sólo son consideradas las funciones analíticas, estado de hecho que permite a Euler pasar de la utilización del concepto de límite de una función (mencionado

> una sola vez en el prefacio), apoyándose en un curioso «cálculo de ceros»" (Youschkevitch, 1976, p. 49).

Con respecto al infinito, Euler poseía una concepción potencial de infinito. Pero, su visión era aritmética y no geométrica, el infinito era una cantidad más grande que cualquier cantidad finita asignable. La suma de la serie de los naturales era infinita, pero no explica el paso de lo finito (suma finita) a lo infinito. Su idea respecto al infinito era semejante a la de Wallis y Bernard Fontenelle, quienes usaron el símbolo ∞ para denotar "*aquellas cantidades que tomaban valores más grandes que cualquier cantidad asignable*", sin preocuparse por encontrar justificaciones metafísicas. Con esta idea se calculaban potencias infinitas como por ejemplo, $\infty \cdot \infty^{\infty-1} = \infty$ y lo infinitamente pequeño era $1/\infty$ (Boyer, 1959, p. 241-242)

> Puesto que la suma de la serie 1+2+3+... puede ser más grande que cualquier cantidad finita, ésta debe ser infinita y puede ser representada por el símbolo ∞.[12] En otro punto él sugirió que ∞ era una suerte de límite entre los números positivos y negativos, en este aspecto semejante al número 0. De manera similar él afirmó que la relación $a/0=\infty$ debería ser interpretada como que, de ninguna vez infinito puede resultar en una magnitud finita.[13] (Boyer, 1959, p.244)

Este manejo libre del infinito, aplicando operaciones válidas en lo finito, a lo infinito, llevo a Euler al igual que a sus contemporáneos que manipularon las expresiones infinitas de la misma manera que las finitas.

Respecto a los fundamentos del cálculo en la obra de Euler, afirma Boyer, fue "*en extremo elemental*". Él creía que las nociones de lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño no ocultaba ningún misterio como se pensaba comúnmente. Por ejemplo, pensaba que las diferencias infinitamente pequeñas son de hecho iguales a cero, pero pueden tener entre sí razones finitas; en su opinión la igualdad $0 \cdot n=0$ implica que $0/0$ puede tomar el valor de n

[12] *Opera omnia*, X, 7. (citado por Boyer, 1959, p.245)

[13] *Opera omnia*, X, 75. (citado por Boyer, 1959, p.245)

en algunos casos, y el cálculo diferencial se ocupa de investigar los valores de tales razones entre “ceros”.

> Esta visión bien pudo servir de base para una interpretación en términos de límites, en la cual las diferenciales son simplemente variables aproximándose a cero como un límite. Euler, sin embargo, no procedió de esta manera. (Boyer, 1959, p.244)

Euler rechazó la creencia generalizada, en la época, que los diferenciales eran cantidades constantes menores que cualquier magnitud asignable y consideró que esta idea era un “miserable abuso del principio de la razón suficiente”[14]

> Él afirmó, como lo había hecho James Bernoulli, que un número menor que cualquier cantidad dada necesariamente es cero.[15] Las diferenciales *dx* y *dy* eran por tanto simples ceros. [...] Leibniz había expresado sugestivamente que los diferenciales podrían ser considerados como ceros cualitativos, los cuales sin embargo conservan por la ley de continuidad el carácter de las relaciones de las cantidades finitas de las cueles ellos eran derivados.” (Boyer, 1959, p.244)

Como Euler rechazó el concepto de infinitesimal, una cantidad menor que cualquier cantidad fijada y sin embargo no nula, en sus *Institutiones* de 1755 sostenía que:

> No hay duda de que cualquier cantidad puede disminuirse hasta el punto que se anule completamente y desaparezca. Pero una cantidad infinitamente pequeña no es otra cosa que una cantidad evanescente y por tanto ella misma ha de ser igual a cero. Ello está también en armonía con esa definición de cosas infinitamente pequeñas según la cual se dice que son menores que cualquier cantidad fijada; ciertamente debería ser nula, pues si no fuese igual a cero se le podría asignar una cantidad igual, lo que es contrario a la hipótesis. (Kline, 1994, p.571)

[14] *Cartas a German Princess*, II, 61; cf. también *Opera omnia*, X, 67. (citado por Boyer, 1959, p.244)

[15] *Opera omnia*, X, pp. 70-72. (citado por Boyer, 1959, p.244)

Euler destierra la noción de diferencial tal como lo entendían sus contemporáneos y se encuentra con el problema de explicar cómo ${}^{dy}\!/\!_{dx}$, que para él era ${}^{0}\!/\!_{0}$, podía ser igual a un número bien definido. Lo hizo de la siguiente manera: dado que para cualquier número n se tiene que $n \cdot 0 = 0$, entonces $n = {}^{0}\!/\!_{0}$; la derivada es simplemente un método útil de determinar ${}^{0}\!/\!_{0}$; para justificar el despreciar la diferencial dx al cuadrado en presencia de, Euler afirma que esta se anula antes de que lo haga *dx.* Veamos como procede Euler para obtener la deriva de $y = x^2$: da a x

El incremento de *w;* ahora el correspondiente incremento de y es $\eta = 2xw + w^2$ y la razón ${}^{\eta}\!/\!_{w}$ vale $2x + w$; dice entonces que esta razón se aproxima tanto más a $2x$ cuanto más pequeño se toma *w,* pero recalca que estas diferenciales η y w son absolutamente cero y que no se puede deducir de ellas otra cosa que su razón mutua, la cual se reduce finalmente a una cantidad finita.

Un ejemplo adicional de los razonamientos de Euler, es como obtiene la derivada de la función logarítmica $y = \log x$ tal como aparece en la sección 180 de sus *Institutiones* (1775). Reemplazando x por $x + dx$ se tiene

$$dy = \log(x + dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$$

Y apelando al desarrollo de la serie de $\ln(1+z)$ resultado trabajado por Euler en el capítulo 7 del volumen 1 de su *Introductio* (1748)

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

Sustituyendo $z = \dfrac{dx}{x}$ se tiene en la última expresión

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^2}{2x^2} + \frac{(dx)^3}{3x^3} - \frac{(dx)^4}{4x^4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{(dx)^n}{nx^n} + ...$$

Como todos los términos después del primero son evanescentes tenemos.

$$d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

En este razonamiento Euler desconoce o pasa inadvertido la convergencia de la serie

$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + ...$, ni justifica la sustitución de z por cualquier expresión de la forma $\frac{dx}{x}$; ni el proceso de inversión en el límite. En definitiva obvia cuestiones de rigor totalmente imprescindibles a la hora de justificar el acertado uso de sus demostraciones.

4.2.4 Análisis del periodo T_2: Periodo comprendido entre los siglos XVII-XVIII.

Continuando con nuestro modelo de análisis y siguiendo el procedimiento seguido para el análisis del periodo denominado de los griegos, responderemos algunas preguntas referente a:

A) La innovación o variación conceptual.

B) Los procedimientos de selección.

C) La relación entre el cambio conceptual y unidad de la disciplina.

4.2.4.1 La innovación o variación conceptual

Marco epistémico. Refiriéndonos inicialmente al marco epistémico que se moviliza durante estos años, es relevante señalar que se produce en este periodo y de manera definitiva la ruptura del paradigma aristotélico respecto a la relación entre la cualidad y la magnitud. El estudio del movimiento y la variación pueden ser ahora realizados cuantitativamente surgiendo la convicción de que la matemática es de alguna forma independiente del razonamiento experimental e intuitivo. Haciendo una comparación con el periodo de los griegos, los cuales intentaron separar y contrastar lo cualitativo y lo cuantitativo, en este segundo periodo con Fermat y Descartes la representación geométrica permitió asociar estos dos aspectos, poniendo en evidencia que aún una explicación cuantitativa está sujeta a nociones sensoriales de tamaño, longitud y duración, entre otras.

Curva: Siguiendo con la evolución del concepto de curva en este periodo, esta es bastante relevante, pues, con el surgimiento de los símbolos algebraicos, la noción de variable y la aparición de las coordenadas cartesianas, las curvas se traducen en lugares geométricos, es decir, conjunto de puntos que satisfacen una cierta relación algebraica dada. Por ejemplo una circunferencia ya no es un trazo que se hace con regla y compás, como en *Los Elementos,* sino el lugar geométrico de los puntos $(x,\ y)$ que están a igual distancia de un punto fijo (h,k) llamado centro de la circunferencia; a la distancia fija se conoce con el nombre del radio de la circunferencia. La ecuación general de dicho lugar geométrico es: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

La geometría analítica junto con el refinamiento de los símbolos del álgebra se convirtió en un instrumento eficaz para la obtención de relaciones abstractas por medio del razonamiento deductivo

Paulatinamente se superan las resistencias de aceptar el álgebra como instrumento para generar nuevas curvas y estudiar sus propiedades geométricas. De aquí en adelante, las propiedades geométricas se podrán formular algebraicamente y, recíprocamente, problemas algebraicos podrán ser interpretados geométricamente.

Curva (Descartes).- Con respecto al progreso del concepto de curva, Descartes alcanza el principio fundamental de la Geometría Analítica que, expresado en lenguaje de hoy, consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, $f(x,y)=0$, corresponden con lugares geométricos, en general con curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación.

Curva (Newton). Newton asume la noción de curva como la trayectoria de un punto en movimiento y Euler con una formalización más cercana a la definición moderna dividió las curvas en dos clases: Las continuas y las discontinuas siendo el significado de estos dos términos muy distintos del actual

Curva-Recta tangente (Fermat) Siguiendo con la mirada en la evolución del binomio curva-recta tangente, Fermat para determinar la tangente a una curva la presentó como una aplicación de su método de máximos y mínimos, método en el cual aparece en forma implícita el concepto actual de límite.

Curva-Recta tangente (Descartes) En lo referente a Descartes y a la evolución del binomio curva-recta tangente, este tuvo relativo éxito en la solución de la línea tangente para ciertas curvas. Su método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas es conocido con el nombre del "método del círculo". Este método algebraico era aplicable a cualquier curva algebraica, pero cuando la ecuación de la curva no era una curva algebraica sencilla, sus cálculos resultaban bastantes costosos.

Curva-Recta tangente (Newton) Newton calcula la tangente a una curva mediante el argumento de que la razón de la ordenada a la subtangente es igual a la razón de las fluxiones de la ordenada y de la abscisa respectivamente: $\frac{y}{\sigma} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ siendo $\dot{y}$ la fluxión de y y $\dot{x}$ la de x.

(Euler). Continuidad Respecto a la continuidad de una función en Euler era una noción centrada en la forma, es decir, en su representación algebraica (analítica), más que referida a una propiedad numérica entre las variables. Para Euler la continuidad se identificaba por la invariabilidad de la ley analítica en todo el dominio de definición de la función. En tanto que, la discontinuidad implicaba un cambio de la ley analítica. Euler llamó, por esta razón, "mixtas" a las curvas discontinuas, para significar que estaban definidas por más de una ley analítica.

(Fermat y Descartes). Continuidad Con Fermat y Descartes la evolución del método de sus coordenadas identifica cada punto del plano con un par ordenado (x, y) de números reales, que provienen de la proyección ortogonal en cada uno de los ejes x y y respectivamente, por lo tanto se está asumiendo, por un lado, que la recta está hecha de puntos, y que cada punto se identifica con un número real y por otro lado, se presume que el plano también está formado por puntos y cada punto se identifica con una pareja de números reales. En este sentido, el fundamento de un sistema de coordenadas radica en el hecho de que asume el continuo geométrico como hecho de puntos.

(Newton). Continuidad En Newton el concepto del continuo no es tratado matemáticamente, se elude introduciendo como sustituto el movimiento ligado a la experiencia perceptiva, como lo había hecho Aristóteles para eludir el problema del infinito y del continuo numérico. La continuidad es un concepto implícito que se percibe, en el sentido que las curvas continuas son aquellas que se representan por un solo trazo. Es un concepto global, geométrico y tiene un carácter temporal.

Continuando con nuestro análisis y el desarrollo evolutivo de otros conceptos que hemos mencionado como constitutivos de la definición moderna de derivada según Cauchy, nos referimos ahora al concepto de infinitesimal.

(Newton). Infinitesimal Newton en lo referente al concepto de infinitesimal presenta dos formas equivalentes. Una de ellas mediante el método que él llama de las primeras y últimas razones, (o las cantidades que nacen y se desvanecen), que es lo que conoce actualmente como el concepto de límite y la otra forma fue el llamado método de las fluxiones y fluentes.

(Leibniz). Infinitesimal Leibniz consideraba los infinitesimales positivos, como números que son mayores que cero, pero menores que todos los reales positivos. Para él los infinitesimales son “incomparables”, porque con respecto a las cantidades finitas son *“como granos de arena con relación al mar”*. Admitiendo, así, un infinito actual y adicionando “como cantidades” (números) los infinitesimales y el infinito.

(Euler). Infinitesimal Euler poseía una concepción potencial de infinito, pero su visión era aritmética y no geométrica; el infinito era una cantidad más grande que cualquier cantidad finita asignable. La suma de la serie de los naturales era infinita, pero no explica el paso de lo finito (suma finita) a lo infinito.

(Newton). Función. Con respecto al concepto de función, en el desarrollo de los trabajos de Newton, aunque este concepto estaba implícito, el cálculo se aplica solo a curvas, y no precisamente al concepto de función que se trabaja en la modernidad, es decir, como la relación entre variables numéricas. Las curvas son el equivalente a nuestras funciones.

(Leibniz). Función Al descubrir en sus trabajos la relación inversa entre el problema del trazado de tangentes y el problema del cálculo de cuadraturas, lo que conocemos hoy como los conceptos de Derivadas e Integrales, Leibniz trabajaba implícitamente con el concepto de función

(Euler). Función En Euler aparece ya una definición del concepto de función: “Una función de una cantidad variable, es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria de aquella cantidad variable y de números, o sea de cantidades constantes. Así cualquier expresión analítica para la cual, junto a la variable *x*, contiene también las cantidades constantes es una función de *x*”. Es decir, para Euler una función es una expresión compuesta de potencias, logaritmos, funciones trigonométricas, etc. En esta definición quedan por fuera las funciones constantes y sólo reconoce como funciones aquellas que se pueden escribir mediante una sola fórmula, es decir, no existen las funciones a trozos, problema que surgió al tratar de resolver la ecuación diferencial de ondas.

Uno de los conceptos centrales en la definición de derivada moderna que sigue la definición dada por Cauchy es el concepto de límite. En los apartados siguientes se presenta una mirada breve a la evolución de este concepto durante este periodo en los autores seleccionados.

(Fermat). Límite El concepto de límite en los trabajos de Fermat está implícito y se moviliza cuando utiliza su método para calcular los máximos y mínimos y su aplicación para calcular rectas tangentes, en el cual su característica relevante es la de incrementar una magnitud que se puede interpretar como la variable independiente, con un incremento ***e*,** donde ***e*** es una variable finita, en el sentido de un valor fijo pero indeterminado. Dividir por ***e*** significaba que ***e*** era diferente de cero; eliminarlo implicaba tratarlo como si fuera igual a cero lo cual era inadmisible. En este método la relación de "adigualdad", es un proceso puramente algebraico por equivalencias y no implica ningún concepto de límite.

(Newtón). Límite La noción de límite en Newton transita implícitamente en sus métodos, específicamente cuando calcula la fluxión: velocidad de cambio de la fluente, magnitud que fluye o varia con el tiempo. Pero donde está más cerca de la idea de límite es en su método: "*Primera y última razón de cantidades nacientes o evanescentes*". Para Newton el límite es una cantidad (cociente) a la cual una razón de cantidades en movimiento se aproxima continuamente, más que cualquier diferencia dada y no puede alcanzarla o sobrepasarla antes que las cantidades hayan decrecido indefinidamente.

(Leibniz).Límite El concepto de límite en los trabajos de Leibniz al igual que en Newton está implícito y se aplica a cantidades variables y no a funciones. Para Leibniz el límite es un "ente último", tal que existe una diferencia infinitesimal entre él y los valores que se le aproximan, tanto como se quiera. El límite se aplica a "cantidades variables", relativa a valores numéricos, las que considera con una visión estática en el sentido de valores fijos pero indeterminados.

4.2.4.2 Los procedimientos de selección.

En este periodo podemos ver que la manera de relacionar ecuaciones y curvas amplió el número de curvas conocidas que antes se reducían a las curvas griegas que se obtenían por regla y compás; "curvas planas", las secciones cónicas "curvas sólidas" y todas las demás que llamaban lineales. Así, además de asociar a las cónicas una ecuación, se llegó a afirmar que las ecuaciones de primer grado en A y en E representan siempre una recta en tanto que las de segundo grado tienen cónicas como lugares geométricos.

4.2.4.3 La relación entre el cambio conceptual y unidad de la disciplina

En este periodo se superan paulatinamente resistencias para aceptar el álgebra como herramienta para generar nuevas curvas y estudiar sus propiedades geométricas. El método de las coordenadas de Fermat y Descartes permitió establecer una correspondencia intuitiva entre el continuo geométrico constituidos por puntos de la recta y un continuo numérico que se supone que existía y se acepta como un hecho necesario.

4.2.5 Periodo T_3 : Conceptos fundamentales del cálculo en los siglos XIX-XX

En este periodo, como es conocido, se inició un cuestionamiento sobre la solidez matemática de los principios que dan soporte al surgimiento del Análisis Infinitesimal, es en esta época donde el concepto de cantidad infinitamente pequeña alcanza un importante rol en las matemáticas y donde las críticas realizadas por el obispo Berkeley[16] dieron comienzo al período de fundamentación o rigurización del cálculo, el cual tomaría más de un siglo en consolidarse.

En buena medida, el centro de los procesos de aritmetizacion y rigurización de las matemáticas durante este periodo se situaban en la manera de eludir el referente geométrico e intuitivo que había predominado en los periodos anteriores, y privilegiar el papel de la aritmética y la lógica en la construcción y la forma de validar de las matemáticas. Con estas críticas del obispo Berkeley (Filosofo Irlandés, 1685-1753) se inició una larga discusión sobre los fundamentos y la rigurosidad del cálculo, abriendo camino a unas nuevas áreas de las matemáticas como son la lógica y la teoría de conjuntos.

Sobre las cuestiones planteadas por la crítica de Berkeley, un enfoque relevante fue el que adoptó Euler, el cual consideraba que el cálculo se ocupa de funciones, pero sin embargo en su momento para él, el concepto principal era todavía el de la “diferencial”. Por tanto

---

[16] ¿Qué son estas fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. Y ¿qué son estos mismos incrementos evanescentes? No son cantidades infinitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera son nada... ¿No podríamos llamarlas fantasmas de cantidades difuntas? George Berkeley (1685-1753).

los primeros cambios centrales respecto a las ideas fundadoras consisten en considerar las funciones como objeto de estudio del cálculo y la derivada como uno de los conceptos centrales, entendiendo por derivada de una función, otra función que se obtiene por un paso al límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

Pero es precisamente el concepto de límite que se movilizaba implícitamente en los fundadores, el que será parte de la solución de las preguntas fundamentales como:

- *¿Existen cantidades infinitamente pequeñas?*
- *¿Se puede garantizar que es seguro el uso de cantidades infinitamente pequeñas*?
- *¿Existen las razones primeras o últimas?*

  Sin embargo, en esta propuesta tenemos como hipótesis, que bien pudo ser el concepto de continuidad de una función en un punto el concepto en el cual se centraría gran parte del estudio del cálculo y particularmente el del cálculo diferencial.

Entre los precursores de este movimiento podemos mencionar, por intereses particulares de nuestra investigación a Joseph-Louis Lagrange**,** Bernard Bolzano, Agustín Cauchy y Karl Weirerstrass entre otros tantos matemáticos no menos importantes como lo son: Carl Gauss, Joseph Fourier, Richard Dedekind y Giuseppe Peano.

Una de las tantas consecuencias de estas críticas es que en este periodo emerge la nueva visión de la matemática que se centra en el establecimiento de un nuevo campo teórico: la teoría de conjuntos. Era importante ofrecer fundamentos lógicos y nociones más precisas en todo el campo de las matemáticas para su creciente y continuo desarrollo y es en esta dirección que se avanzó en un proceso de formalización y axiomatización de las matemáticas; en adelante la lógica y la teoría de conjuntos se instalan como base de la matemática pura que comprende: la aritmética, álgebra y el análisis, es así como Bolzano en este periodo define la matemática como la ciencia de las leyes del objeto en general:

> La matemática es una ciencia demostrativa que procede a partir de proposiciones primitivas (axiomas), definidas no apelando a la evidencia, sino a su poder deductivo. (Sabestik, 1990, p. 398)

Esta visión, compartida por la mayoría de sus contemporáneos nombrados arriba, implicó el desarrollo de la construcción y definición de conceptos fundamentales en el edificio de las matemáticas como los conceptos de número, función, continuidad, derivabilidad, entre otros; sobre una base lógica y conjuntista independientes de las interpretaciones subjetivas y sólo obligadas a preservar la coherencia interna del sistema.

Por tanto en este periodo uno de los problemas que se plantea y el cual es eje de esta investigación es el que apunta en la dirección de encontrar la derivada ya no limitados solo a curvas geométricas sino a las funciones, las cuales en este periodo hacen presencia de forma explícita. El cálculo diferencial e integral surgen entonces no sólo en la perspectiva de resolver los problemas físicos planteados en el periodo anterior sino ahora con el fin de caracterizar y "darle ontología" a los conceptos matemáticos involucrados en la solución de este problema. Se trata entonces de responder a algunas de las preguntas que desde el inicio de este estudio han sido transversales, son: ¿cómo calcular la tangente de una curva cualquiera en un punto? y ¿cómo calcular los máximos y mínimos de una función dada?

Dando seguimiento con nuestro estudio histórico-crítico del concepto de derivada y los conceptos constitutivos mencionados anteriormente, en este periodo presentaremos brevemente algunos trabajos de los siguientes matemáticos:

Joseph-Louis Lagrange	(1736-1813)
Bernard Bolzano,	(1781-1848)
Agustín Louis Cauchy,	(1789-1857)
Karl Weierstrass,	(1815-1897)

4.2.5.1 JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)

Astrónomo y matemático franco-italiano, nacido en Turín y fallecido en París. La habilidad matemática de Lagrange fue reconocida por Euler a partir de un *memorándum* que recibió de Lagrange acerca del cálculo de variaciones, sobre el que el propio Euler ya había trabajado. Utilizando el análisis de las variaciones, dedujo unas ecuaciones muy generales con las que se podían resolver todos los problemas de la mecánica.

Siguiendo con la idea de dar cuenta y justificar los desaciertos o errores señalados por Berkeley, Lagrange reaccionó tratando de evitar el uso de aquellos elementos del cálculo que se manipulaban convenientemente para obtener resultados correctos. En 1759, comunica a Euler su intención de desarrollar un programa en el cual el cálculo se fundamente en un método algebraico que, según él,

> "...sea el más claro y más simple que se haya dado: esto es, como puede verse, independiente de toda metafísica y de todas las teorías del infinitamente pequeño o cantidades evanescentes (límites)...."

Centrándonos específicamente en el concepto de derivada, Lagrange, en un artículo de 1772 expone por primera vez la idea de definir la derivada únicamente utilizando procedimientos algebraicos. En su *Théorie des functions analytiques* (1797, *Euvres,* 9), presenta los principales teoremas del cálculo diferencial evitando el uso de nociones, como lo infinitamente pequeño, las cantidades evanescentes, el de límites o fluxiones, y reducido al arte del análisis algebraico de las cantidades finitas.

Antes de mirar el trabajo acerca de la derivada en Lagrange, reseñaremos las definiciones de los conceptos relacionados que están explícitos en su obra y que son de nuestro interés para la construcción de la estructura matemática del concepto de derivada moderno.

Respecto a la definición de función, Lagrange retoma una definición similar a la que ya habían formulado Jean Bernoulli y Euler, que reconocían como tal a las expresiones analíticas formadas, de modo arbitrario, a partir de una cantidad variable y constantes. Dicho de otro modo, una función es una combinación de variables y constantes por medio de operaciones en una expresión. Lagrange definió función de la siguiente manera:

> Llamamos *función* de una o de varias variables a cualquier expresión del cálculo en la que entran dichas cantidades de una manera arbitraria... La palabra ***función*** fue utilizada por los primeros analistas para denotar las potencias de una cantidad en general. Desde entonces el significado de la palabra se ha extendido para designar cualquier cantidad formada de manera arbitraria a partir de otra cantidad... »[17]

El concepto de función continua lo seguía siendo en el mismo sentido que se había presentado en principio por Euler, es decir, expresiones algebraicas analíticas. Lagrange estaba convencido que toda función se podría desarrollar en una serie de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots \qquad \textbf{(1)}$$

donde los coeficientes $p, q, r, \ldots$ eran las funciones derivadas. Lagrange añadía que estos coeficientes podían ser calculados por métodos que están libres de las consideraciones de paso al límite.

> "Mediante un argumento un tanto complicado pero puramente formal, Lagrange concluye que podemos obtener 2q de p del mismo modo que obtenemos p de f(x), y que una conclusión análoga se tiene para los demás coeficientes, r, s,... de (**1**). De aquí, si notamos p por f'(x) y designamos por f''(x) la función derivada de f'(x) como f'(x) se deriva de f(x) entonces
>
> $$p = f'(x), \qquad q = \frac{1}{2!} f''(x) \qquad r = \frac{1}{3!} f'''(x)$$
>
> de donde (**1**) da
>
> $$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!} h^2 f''(x) + \frac{1}{3!} f'''(x) + \ldots$$

[17] Lagrange, J. 1813, *Théorie des functions analytiques*, (segunda ed.). [Cit. por Grattan-Guinness, 1984. p. 133]

> [...] A Lagrange le resta todavía mostrar cómo deriva p o $f'(x)$ de $f(x)$. Para ello, utiliza (1) despreciando todos los términos después del segundo. Así, pues, $f(x+i) - f(x) = pi$, divide por i y concluye que $p = f'(x)$" (Kline, 1994, p. 574)

La afirmación, de Lagrange, que "*toda función se podría expresar en una serie de Taylor*" llevó al abandono de su programa y dejó de ser considerado como una opción para la fundamentación del cálculo. En efecto, Cauchy en 1852, dio un ejemplo de una función derivable que, sin embargo, no admite representación en serie de Taylor alrededor de cero; tal función es:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

puesto que la función tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de $\Re$ y en cero la derivada de cualquier orden es cero, es decir, $f^n(0) = 0$ para cada $n \in N$ por consiguiente, la formula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$ solo se cumple para $x = 0$" (Farfán, 1997. p. 53, citado en Delgado, 1998, p. 225)) y a continuación Farfán hace la siguiente consideración:

> "Sin embargo, Lagrange logra demostrar los teoremas básicos del cálculo y obtiene las funciones derivadas para funciones sencillas del tipo que nosotros utilizamos en el bachillerato; por esta razón resultaría interesante probar un acercamiento lagrangiano en nuestros cursos de este nivel" (Farfán, 1997. p. 53. Citado en Delgado,1998, p. 225)

Respecto a la cita anterior conviene resaltar que a este nivel encontramos una coincidencia con nuestro punto de vista, el cual considera perfectamente viable un tratamiento al concepto de derivada en esta dirección utilizando una definición alterna que denominamos la derivada de Carathéodory, la cual es el objeto de estudio en esta tesis.

4.2.5.2 BERNARD BOLZANO (1781-1848)

Bolzano fue un filósofo, matemático y teólogo, el cual hizo grandes contribuciones a la matemática y a la lógica, Bolzano fue uno de los primeros matemáticos que emprendió la obra de fundamentación del cálculo y se adelantó a los analistas del siglo XIX en el concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades. Inició con un estudio cuidadoso de las propiedades de las funciones, con el fin de volver a interpretar y demostrar matemáticamente aquellos conceptos y teoremas basados solo en intuiciones geométricas desarrolladas en los periodos anteriores, Bolzano fue llevado a este trabajo cuando trataba de proporcionar una demostración puramente aritmética del teorema fundamental del algebra en lugar de la primera demostración de Gauss (1799), la cual aún usaba ideas geométricas.

Las deficiencias teóricas evidenciadas en los periodos anteriores asociadas a la falta de rigor matemático, fueron en algunos casos resultado del recurso de la intuición espacial y temporal al que se veían obligados los matemáticos, ante la ausencia de una base teórica que direccionara sus capacidades intelectuales cuando trataban de formular y probar sus conjeturas. Esta visión de formalizar y precisar con rigor los conceptos matemáticos implicó el establecimiento de un nuevo orden en la construcción del edificio matemático: la aritmética, álgebra y el análisis constituyen la matemática pura.

La geometría, que hasta entonces era el prototipo de sistema axiomático, tiene que reubicarse en el nuevo sistema como parte de las disciplinas aplicadas al espacio. Como resultado de este nuevo orden, se realiza una nueva síntesis de muchas demostraciones fundadas previamente sobre demostraciones geométricas y cinemáticas y que en adelante sólo pertenecerán a la matemática pura. Lo anterior implicó la necesidad de precisar los conceptos fundamentales de la matemática pura y en particular los del análisis como el concepto de función, límite, continuidad, derivada e integral.

En los siguientes párrafos describiremos brevemente algunos de los aportes teóricos en Bolzano, nuevamente de los conceptos que hemos señalado como constitutivos de la estructura del concepto moderno de derivada.

Respecto al concepto de función, fue Bolzano el que inició un estudio cuidadoso de las propiedades de este concepto, su teoría tiene bases en el conjunto de los números medibles y en el concepto de función entendida como dependencia arbitraria entre los números. Uno de los resultados importantes de esta teoría fue la introducción, por primera vez, de la noción de continuidad de una función como un concepto propiamente matemático.

Hasta este momento, la noción de continuidad se veía como útil y se utilizaba pero no era considerada un objeto de estudio en sí misma, En adelante ésta noción goza de un estatuto matemático, reconociendo la importancia de su papel en la fundamentación del análisis, por tanto se torna un objeto de estudio del cual interesa investigar su relación con los conceptos de límite y, por supuesto, con el concepto de derivada e integral (Delgado, 1998, pp. 237-238)

La primera definición de continuidad dada por Bolzano en 1817-18, hacía intervenir todos los puntos de un intervalo:

> $f(x)$ es continua en un intervalo si en cualquier x del intervalo la diferencia $f(x+w) - f(x)$ se puede hacer tan pequeña como se desee tomando w suficientemente pequeña. (Kline, 1994, p. 1225)

Si bien esta definición introduce la noción de continuidad como concepto matemático, ella no está libre de debilidades que más adelante serán criticadas. Expresiones como "se puede hacer tan pequeña como se desee" o "suficientemente pequeñas" no se consideraron como aceptables. Esto de ningún modo va en detrimento de la labor institucionalizadora en que se empeñó Bolzano y la utilización de esta definición para demostrar las propiedades de las funciones continuas sobre intervalos cerrados (los compactos en los reales): acotamiento, el valor máximo se alcanza, valores intermedios y el teorema que afirma que una función monótona que toma todos sus valores intermedios es continua. Lo interesante, anota Sabestik es el estilo de las demostraciones de Bolzano que

> "Es exactamente de la misma forma que tales teoremas serán demostrados por Weierstrass y su escuela. La teoría de funciones se apoya sobre los teoremas fundamentales de la teoría de números medibles: teorema de Bolzano-Cauchy, de Bolzano-Gauss y de Bolzano-Weierstrass. El concepto de punto de

acumulación está claramente formulado por Bolzano y todas las demostraciones están conducidas de manera puramente aritmética, basándose en las propiedades de los números reales en un lenguaje puro, de donde toda noción ajena, de origen geométrico o cinemático, es excluida, lenguaje que ya es el nuestro." (Sabestik, 1990, p.415)

En su estudio de la continuidad, Bolzano demuestra que la continuidad por izquierda no implica la continuidad a derecha, pero no puede extender la definición a funciones de varias variables. Tampoco llega a establecer la continuidad uniforme. Además, Bolzano proporcionó un ejemplo que demostraba que era equivocada la creencia que la continuidad de una función era suficiente para garantizar su diferenciabilidad[18];

> Bolzano proporcionó un ejemplo de una función no diferenciable. [...] Esta ilustración dada por Bolzano pudo haber cumplido, en la matemática, el papel del *experimento crucial* en ciencia, mostrando que las funciones continuas no necesariamente, a pesar de las sugerencias de la intuición geométrica y física, poseen derivadas. Sin embargo, a causa d que el trabajo de Bolzano no fue conocido en su tiempo, tal papel fue reservado al famoso ejemplo de tal función dado por Weiersstrass alrededor de un tercio de siglo más tarde." (Boyer, 1959, p. 270).

Bolzano también proporcionó el ejemplo de una función discontinua en todo punto de su dominio. Estas funciones producían inconsistencias externas a las concepciones que se instauraron en la mente de los matemáticos por la relación que se establecía entre la continuidad y el movimiento físico, o la continuidad del espacio y el tiempo. Según sugerían los sentidos la variación debería representarse en una función por lo menos continua a pedazos y desde esta visión no se podía concebir una función continua y no diferenciable en ningún punto. Estos ejemplos muestran que las sugerencias intuitivas que provienen de los sentidos pueden ser engañosas y contraproducentes en el momento de precisar los conceptos y propiedades de los objetos matemáticos.

[18] Ver Boyer, 1959, p. 269

Respecto al infinito, Bolzano fue uno de los primeros matemáticos en aceptar el *infinito actual* y comparó conjuntos infinitos estableciendo una correspondencia biunívoca entre sus elementos. Aunque, realmente se trataba de un redescubrimiento de la idea de correspondencia biunívoca usada por Galileo cuando señaló que los enteros positivos se pueden poner en relación con una parte de su clase, por ejemplo los cuadrados perfectos[19]. Lo importante en este nuevo encuentro, es que Bolzano, centró su atención, como lo hizo Platón, sobre el infinito como multiplicidad o agregación, apartándose de la visión de los escolásticos de la alta edad media que, al igual que Aristóteles, consideraron el infinito desde el punto de vista de las magnitudes.

Esta visión del infinito actual, formado por agregados le permitió concebir los objetos geométricos como siendo formados por puntos para así establecer el cálculo sobre la base de un riguroso desarrollo de la teoría de encajes infinitos.

En cuanto al concepto de derivada, Bolzano fue el primer matemático (1817) en definir la derivada de $f(x)$ como la cantidad $f'(x)$ a la cual se acerca indefinidamente la razón $\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}$ conforme Δx se acerca a 0 con valores positivos y negativos. Bolzano insistió en que $f'(x)$ no era un cociente de ceros o una razón de cantidades evanescentes sino un número al cual tendía la razón anterior. Pero Bolzano fue más allá explicando la naturaleza del concepto del límite. Lagrange y otros matemáticos habían sentido que la noción del límite estaba limitada a un cociente de cantidades evanescentes o de ceros. Euler había explicado $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de ceros, y en este respecto Bolzano, como siempre, enfatizó que éste no debería ser interpretado como una proporción de *dy* a *dx* o como el cociente de cero dividido por cero, sino más bien como un símbolo único para una sola función.

[19] Ver Boyer, 1959, p. 116

4.2.5.3 AGUSTÍN-LOUIS CAUCHY (1789-1857)

En este periodo y desde el punto de vista del rigor, a Cauchy se le considera uno de los fundadores del análisis moderno, algunos de sus aportes fue haber desarrollado demostraciones y definiciones libres de todo referente geométrico y es así que formuló de manera rigurosa los conceptos fundamentales de este campo de la matemática.

Cauchy, como muchos matemáticos de su época dio por sentado el concepto de número real y a partir de esta base definió los conceptos básicos del análisis. Su trabajo inicia tomando como eje central el concepto de límite para el desarrollo y evolución del cálculo, en particular para los conceptos de derivada e integral.

Veamos las definiciones de conceptos previos para la constitución del concepto de límite y el concepto de derivada que movilizo Cauchy en su *Cours d'analyse* (1821),

Respecto al concepto de variable

> Se llama variable a una cantidad que se considera tiene que tomar sucesivamente muchos valores unos de los otros[20]

En cuanto al concepto de función:

> «Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que estando dado el valor de una de éstas, se pueda determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se conciben a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de la variable»[21]

En esta definición ya no se menciona la forma expresión analítica como el elemento que define la función sino el valor de la función.

[20] Citado en Kline, 1992, p. 1254.

[21] Citado en Kline, 1992, p. 1254.

Es a Cauchy a quien se le atribuye el honor de ser el primero en institucionalizar el concepto de límite que antes se usaba como una noción instrumental necesaria en los procesos de aproximación. Cauchy, al igual que Bolzano comprendió que la materia debería ser explicada en términos de límites. El concepto de límite hasta Bolzano y Cauchy careció de precisión en su formulación. Esto se debió a que seguían ligados a intuiciones geométricas y físicas que obstaculizaban la concepción aritmética del concepto, y por otro lado, a la interpretación de los inventores del concepto que lo veían como instrumento para tratar con cantidades geométricas. Como hemos mostrado anteriormente, Euler y Lagrange en cierto sentido representaron la excepción a esta regla. Ellos consideraron necesario establecer el cálculo centrado en el formalismo de su concepto de función analítica. Sin embargo rechazaron la idea de límite.

El concepto de límite aparece en su libro *Cours d'Analyse* de 1821 que sistematiza sus notas del curso que impartía en la l'ecole Royale Polytechnique de París.

> Cuando los valores sucesivos asignados a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo de modo que terminan por diferir de él tan poco como se desee, este último es llamado el límite de los otros. Así por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él.

Ésta es la definición más clara y sintética del concepto de límite que se había dado hasta ese momento, aunque otros matemáticos después iban a expresar inconformidades a ella para hacerla aún más formal y precisa. Podemos señalar que la definición de Cauchy apeló a las nociones de número, variable, y función, más que a intuiciones geométricas y dinámicas. Si analizamos esta definición, a la luz del rigor matemático actual, ella presenta algunas imprecisiones que se pueden ilustrar en los siguientes cuestionamientos: ¿qué significa "se acercan indefinidamente"? Y ¿"cada vez más aproximados"?. Cuando se trata de buscar una justificación matemática a esta terminología en el trabajo de Cauchy no se encuentra. Por ejemplo se podría pensar que Cauchy trata de responder estos cuestionamientos cuando define los infinitésimos y lo infinitamente grande. Veamos

> En el prefacio de su trabajo de 1821, Cauchy dice que para hablar de la continuidad de las funciones debe dar las propiedades de las cantidades

> infinitamente pequeñas,Se dice que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de modo tal que converge al límite 0.» [*Cours*, p. 5] llama a tales variables infinitésimos.
>
> Se dice que una cantidad variable se hace infinitamente grande cuando su valor numérico se incrementa indefinidamente de manera tal que converge al límite ∞.» [*Cours*, p. 5] Sin embargo ∞ no significa una cantidad fija, sino algo indefinidamente grande" (Kline, 1994, p. 1256)

Llama la atención en esta definición la interpretación que Cauchy hace del infinito en sus dos aspectos: lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Recordemos que el infinito Aristotélico aceptaba lo infinitamente grande por agregación, pero sólo en *potencia*, esta misma idea se encuentra presente en la definición de Cauchy. Pero, por otro lado, Aristóteles negó lo divisibilidad infinita y por tanto desterró la posibilidad de aceptar los infinitesimales; ahora Cauchy gracias al concepto de límite resuelve el problema de la negación de lo infinitamente pequeño, que obstaculizó desde los griegos hasta finales de la edad media el desarrollo del cálculo infinitesimal. Aquí no hay división infinita, solo existe una *variable* de *valor numérico* que decrece *indefinidamente* al número cero. Pero esto no resuelve el problema presente en la definición de límite, pues si se toma en consideración las definiciones de infinitésimos e infinito, la definición de límite resulta circular. El problema se resolverá, más adelante cuando la definición se plantee en términos, no de un infinito potencial, sino actual como lo hizo más adelante Weierstrass.(Delgado 1998, pp.240-241)

El concepto de continuidad de una función en Cauchy, de acuerdo con la cita de Kline, se plantea en términos de infinitésimos o lo que es equivalente, en términos de límites, como sigue:

> … decimos que la función *f(x)* es una función continua de x en la vecindad de un valor particular asignado a la variable *x*, siempre que sea continua [la función] entre estos dos límites de *x,* no importe cuan cercanos estén, los cuales encierren el valor en cuestión». Entonces se dice que *f(x)* es

discontinua en *x* si no es continua en todo el intervalo alrededor de *x*" (Kline, 1994, p. 1256)

La definición de Cauchy se puede caracterizar, entonces, como *local*, porque se mira lo que sucede en un punto del intervalo, para luego generalizarlo a todos los otros puntos; es *aritmética* porque para determinarla se recurre a calcular el límite y su estatuto es *matemático*.

Respecto al concepto de derivada, Cauchy define este concepto por primera vez en el *Cours d'Analyse* de 1821 en la tercera *lección*, Capítulo VIII así:

> Cuando una función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable x y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la *razón de diferencias*
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
>
> Serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultánea al límite cero, la razón misma podría converger a un límite ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x.

Con esta definición se centra en adelante el estudio del cálculo diferencial y la expresión "diferencial" importantísima en los trabajos de Leibniz y sus contemporáneos se define entonces en términos del concepto de derivada de la siguiente manera: si *dx* es una cantidad constante finita *h*, entonces el diferencial *dy* de *y* = *f*(*x*) está definido por *f'*(*x*)*dx*. En otras palabras, los diferenciales *dy* y *dx* son así cantidades escogidas que su proporción $\frac{(dy)}{(dx)}$ coincide con el límite *y'* = *f'*(*x*) de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

> Cauchy, sin embargo, dio a la derivada y al diferencial una precisión formal que había estado faltando en las definiciones de sus predecesores. Él pudo por consiguiente también dar definiciones satisfactorias de diferenciales de orden más alto. El diferencial $dy = f'(x)dx$ es, por supuesto, una función x y dx. Refiriéndose a dx como una cantidad fija, la función $f'(x)dx$ tendría a su vez una derivada $f''(x)dx$ y una diferencial $d^2y = f''(x)dx^2$. En general $d^ny = f^n(x)dx^n$. Cauchy agregó que puesto que la enésima derivada es el coeficiente por el cual dx^n será multiplicado para dar d^ny, esta derivada se llama el coeficiente del diferencial. (Boyer, 1959, p. 276)

Siguiendo el texto " Curso de Análisis" La definición de la función derivada de Cauchy, más que remitir a una historia que se remonta al cálculo de las diferencias de Leibniz o al método de las fluxiones de Newton, refleja una relación más cercana hacia el trabajo de Lagrange. Como ya hemos mencionado, el término de función derivada es introducido por Lagrange en su teoría de funciones analíticas, en donde resalta que se trata de una función que resulta de una operación, que hasta antes de él, solo se admitía para ciertos valores o cantidades variables. En el periodo anterior con Leibniz y Newton, se parte del principio de variación, condición sin la cual no existirían las diferencias o las fluxiones y será con Lagrange que la operación se realiza sobre una función. Sin embargo, como se puede observar en la definición de derivada de Cauchy, esta se introduce a partir del concepto de límite de una función y del concepto de una cantidad infinitamente pequeña, adicionalmente Cauchy retoma como elemento central que la operación derivada se aplica sobre una función y define a una nueva función, aspecto totalmente ausente en el periodo anterior con las diferencias de Leibniz o el método de las fluxiones de Newton y a diferencia de Lagrange define la derivada utilizando el concepto de límite ausente en el trabajo puramente formal de este, y es de esta forma Cauchy abandonó las representaciones explicitas de Euler y las series de potencias de Lagrange e introdujo nuevos conceptos para tratar las funciones y en particular el concepto de derivada.

Para finalizar este apartado, con los trabajos de Cauchy puede afirmarse, que los conceptos fundamentales del cálculo recibieron una formulación rigurosa. Cauchy normalmente tiene por esta razón que ser considerado como el fundador del cálculo diferencial en el exacto sentido moderno. Sobre una definición precisa de la noción de límite, él construyó la teoría de la continuidad y series infinitas, como también la teoría de la derivada, del diferencial, y la integral.

4.2.5.4 KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

El trabajo de Karl Weierstrass sobre la rigorización del análisis, mejoro el de Bolzano y Cauchy, al igual que estos, busco la manera de evitar la intuición y los referentes geométricos para situarse solo en conceptos aritméticos. Weierstrass dedicó gran parte de sus años de vida a la docencia. Su producción científica comenzó a ser conocida después de los cuarenta años de edad, durante los años 1850 hasta 1880 en que se desempeñó como profesor de la Universidad de Berlín, donde llegó a ejercer una influencia enorme a través de sus cursos impartidos y en cuyas cátedras demostró entre otras tantas proposiciones, que para cualquier función continua de una o más variables definida sobre un dominio cerrado y acotado existe un valor mínimo y un valor máximo de la función.

Siguiendo a Grattan–Guinness (p.174), es bastante posible que el mismo Weierstrass viera en sus propios aportes a la fundamentación del análisis matemático una continuación de la obra de Cauchy, sin embargo todo indica que inició su reconstrucción antes de leer alguna de las obras de Cauchy y en realidad fue muy crítico con sus métodos. Podemos mencionar más bien que su trabajo en principio es más cercano a la línea de los puntos de vista de la obra de Lagrange, aunque desde luego, dándole un tratamiento mucho más sofisticado y riguroso a los problemas de convergencia y de existencia de los límites.

Dando continuidad con nuestro estudio de los conceptos constitutivos del concepto de derivada moderno, rastrearemos cómo se manifiestan los conceptos de variable, función, límite, continuidad y derivada en los trabajos de Weierstrass. Iniciaremos con la definición de una variable continua, la cual era definida en términos de consideraciones estáticas relacionándola aritméticamente con su conjunto de valores numéricos:

> Si para cualquier valor x_0 del conjunto y para cualquier sucesión de números positivos δ_1, δ_2, δ_3,..., δ_n no importa que tan pequeños sean, existen en los intervalos $(x_0–\delta_i,\ x_0+\delta_i)$ otros del conjunto, esta es llamada continua”. (Boyer, 1959, p. 286)

En otras palabras, una variable continua en un conjunto A de los valores de la variable es aquella tal que para todo x_0 en A y δ cualquier número positivo, hay otros valores de la variable en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. En esta misma dirección, Weierstrass define la continuidad, diciendo que la función *f* es continua, en ciertos límites de x,

> Si para algún valor x_0 en el intervalo y para algún número positivo ε arbitrariamente pequeño, es posible encontrar un intervalo alrededor de x_0 tal que, para todos los valores en este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto menor queε. (Boyer, 1959, p. 287)

De la misma manera, para una función continua Weierstrass dio a una definición equivalente a aquéllas de Bolzano y Cauchy, pero teniendo más claridad y precisión.

Para decir que $f(x + \Delta x) — f(x)$ llega a ser un infinitesimal, o se vuelve y permanece menor de cualquier cantidad dada, cuando Δx tiende a cero, trae a la mente cualquiera de las dos el infinitamente pequeño o las nociones vagas de movilidad.

> Weierstrass definió $f(x)$ como continua, dentro de ciertos límites de x, si para cualquier valor x_0 en este intervalo y para un número positivo arbitrariamente pequeño ε, es posible encontrar un intervalo alrededor de x_0, tal que para todos los valores en este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto menor que ε. (Boyer, 1959, p. 287)

En la actualidad la definición de función continua dada por Weierstrass es la que se moviliza en la gran mayoría de textos, la cual se formula de la siguiente manera:

$f(x)$ es continua en $x = x_0$ si dado cualquier número positivo ε, existe una δ tal que para toda x en el intervalo $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Misma que se escribe empleando los símbolos lógicos y de la teoría de conjuntos en la forma: *f* es continua en $x = p$

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0\ ((\forall x \in D_f\ (|x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon))) \quad \mathbf{(1)}$$

Similarmente se define el límite de una variable o de una función:

> Si para cualquier ε dado, puede ser encontrado un η_0 tal que para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces L es el límite de f(x) en $x = x_0$ " (Boyer, 1959, p. 287).

que en términos actuales se escribe simbólicamente: *L* es el límite de *f* en *x=p* si

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0\ (\forall x\in D_f\ (0<|x-p|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon))) \quad (\mathbf{2})$$

Esta expresión de la idea del límite que ya no incurre en los problemas de circularidad que hemos anotado en el caso de la definición de Cauchy y las definiciones de derivada e integral, proporcionaron las concepciones fundamentales del cálculo con una precisión que puede ser considerada como la constitución de su formulación rigurosa.

En esta última definición de límite de Weierstrass no existe alguna referencia a infinitesimales, por tanto la designación "cálculo infinitesimal," que se usa hoy incluso, resulta impropia. Aunque varios matemáticos, del segundo periodo entre ellos Newton y Leibniz hasta este tercer periodo, mencionando a Bolzano y Cauchy, habían buscado evitar el uso de cantidades infinitamente pequeñas, el simbolismo equívoco de Weierstrass puede considerarse como el que efectivamente destierra del cálculo la noción persistente del infinitesimal fijo.

4.2.6 Análisis del periodo T_3: Periodo comprendido entre los siglos XIX-XX.

Continuando con nuestro modelo de análisis y siguiendo el procedimiento seguido para el análisis de los periodos anteriores, responderemos algunas preguntas referente a:

A) La innovación o variación conceptual.

B) Los procedimientos de selección.

C) La relación entre el cambio conceptual y unidad de la disciplina.

4.2.6.1 La innovación o variación conceptual

En este periodo el origen geométrico de las variables se hizo cada vez más remoto y el cálculo se centró sobre las fórmulas o expresiones algebraicas. Se pasa entonces del cálculo en un marco geométrico al cálculo en el marco algebraico. Por tanto las innovaciones conceptuales y los avances del cálculo consistieron en la aplicación de métodos analíticos para resolver los problemas relacionados con "curvas" y se aplicaban a cantidades geométricas variables que se relacionaban por medio de ecuaciones.

(Lagrange). Función Lagrange definió función de la siguiente manera:

Llamamos *función* de una o de varias variables a cualquier expresión del cálculo en la que entran dichas cantidades de una manera arbitraria... La palabra ***función*** fue utilizada por los primeros analistas para denotar las potencias de una cantidad en general. Desde entonces el significado de la palabra se ha extendido para designar cualquier cantidad formada de manera arbitraria a partir de otra cantidad... »

(Lagrange). Continuidad El concepto de función continua lo seguía siendo en el mismo sentido que se había presentado en principio por Euler, es decir, expresiones algebraicas analíticas. LaGrange, intenta resolver el problema de la fundamentación por medio de un método algebraico que no hace intervenir los infinitesimales y al parecer fundamentado en una concepción de continuidad como una propiedad de aproximación implícita en sus demostraciones en las que intervenían las series de Taylor. Define la continuidad, por supuesto que esta fundamentación fue bastante lenta, pues, requiere del establecimiento del continuo numérico, pero para ello se tendría que esperar hasta los logros de Cantor y Dedekind en la construcción de los números reales.

(Bolzano). Función Respecto al concepto de función, fue Bolzano el que inició un estudio cuidadoso de las propiedades de este concepto, su teoría tiene base en el conjunto de los números medibles y en el concepto de función entendida como dependencia arbitraria entre los números.

(Bolzano). Continuidad En este periodo emergen paralelamente los conceptos de variable, función, límite, continuidad y con Weierstrass la evolución del concepto de variable se acerca a la definición moderna, al introducir un lenguaje conjuntista, eliminando el concepto de movimiento asociado al concepto de variable que se traía de los periodos anteriores.

(Bolzano). Infinito. Respecto al infinito, Bolzano fue uno de los primeros matemáticos en aceptar el *infinito actual* y comparó conjuntos infinitos estableciendo una correspondencia biunívoca entre sus elementos.

(Bolzano). Derivada. En cuanto al concepto de derivada, Bolzano fue el primer matemático en definir la derivada de $f(x)$ como la cantidad $f'(x)$ a la cual se acerca indefinidamente la razón $\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}$ conforme Δx se acerca a 0 con valores positivos y negativos.

(Cauchy).Variable Se llama variable a una cantidad que se considera tiene que tomar sucesivamente muchos valores unos de los otros.

(Cauchy). Función En cuanto al concepto de función:

«Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que estando dado el valor de una de éstas, se pueda determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se conciben a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de la variable»

(Cauchy). Límite: Cauchy define límite asi: Cuando los valores sucesivos asignados a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo de modo que terminan por diferir de él tan poco como se desee, este último es llamado el límite de los otros. Así por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él.

(Cauchy). Continuidad El concepto de continuidad de una función en Cauchy, es como sigue:

… decimos que la función f(x) es una función continua de x en la vecindad de un valor particular asignado a la variable x, siempre que sea continua [la función] entre estos dos límites de x, no importe cuan cercanos estén, los cuales encierren el valor en cuestión». Entonces se dice que f(x) es discontinua en x si no es continua en todo el intervalo alrededor de x" (Kline, 1994, p. 1256).

(Cauchy). Derivada. Cuando una función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable x y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la *razón de diferencias*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultánea al límite cero, la razón misma podría converger a un límite ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular
de x.

(Weierstrass).Variable. Una variable continua en un conjunto A de los valores de la variable es aquella tal que para todo x_0 en A y δ cualquier número positivo, hay otros valores de la variable en el intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

(Weierstrass).Continuidad. Una función *f* es continua, en ciertos límites de x, Si para algún valor x_0 en el intervalo y para algún número positivo ε arbitrariamente pequeño, es posible encontrar un intervalo alrededor de x_0 tal que, para todos los valores en este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto menor queε. (Boyer, 1959, p. 287).

(Weierstrass).Límite. El límite de una variable o de una función: Si para cualquier ε dado, puede ser encontrado un η_0 tal que para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces L es el límite de f(x) en $x = x_0$ ” (Boyer, 1959, p. 287).

4.2.6.2 Los procedimientos de selección.

Es importante señalar nuevamente que la definición de derivada dada por Cauchy apunta en la misma vía de los trabajos de Lagrange en el sentido de que, la operación de derivación se realiza sobre una función y su resultado es otra función, a diferencia del periodo anterior con Newton y Leibniz los cuales su proceso de derivación sólo lo efectuaban para ciertos valores o cantidades variables; ellos no conciben un resultado para el dominio total de variación.

Weierstrass construyó una base puramente aritmética y formal para el análisis, independiente de toda consideración geométrica y dio la definición de límite que se comunica modernamente en los cursos de Cálculo diferencial. Finalmente el análisis se posesiona como una disciplina independiente de las matemáticas, su concepto fundamental que lo soporta es el de límite y lo toma como eje central para definir el de derivada.

La constitución de sistemas simbólicos más desarrollados permitieron abstraer ideas implícitas de procesos operatotrios, las cuales se canalizarían en la construcción formal de conceptos el concepto de función, el continuo numérico y el concepto de límite

4.2.6.3 La relación entre el cambio conceptual y unidad de la disciplina.

En este periodo se tiene una visión más amplia de las matemáticas y se cristaliza en un campo teórico nuevo conocido como la teoría de conjuntos. En los siglos siguientes tanto la lógica y la teoría de conjuntos se posicionan como la base de la matemática pura, la cual comprende la aritmética, el álgebra y el análisis.

4.2.7 Período T4: moderno:

En este periodo nos situaremos de forma sucinta en los trabajos de Maurice Fréchet (1878-1973) y Constantine Caratheodory (1873-1950) centrados en el desarrollo evolutivo de la definición de derivada después de la definición dada por Cauchy en 1821.

4.2.7.1 MAURICE FRÉCHET (1878-1973).

Como hemos compartido anteriormente la definición de derivada de Cauchy para una función de una variable f en un punto a está definida por el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h) - f(a)]}{h}$$

Siempre y cuando este límite exista, que es equivalente a este otro límite

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}$$

Después de realizar una sustitución adecuada.

Lo que significa geométricamente es que la gráfica de f admite una recta tangente no vertical en el punto ($a; f(a)$). Evidentemente f es una función de los reales en los reales ($f:\Re\to\Re$), lo que pretendemos en este apartado es ilustrar la generalización que desarrolla Fréchet de esta definición para campos vectoriales y campos escalares en general, veamos inicialmente la definición:

Sean $f:\ \Re^n\to\Re^m$ y $a\in\Re^n$, se dice que f es diferenciable en a, en el sentido de Frechet si existe una transformación λ ; $\Re^n\to\Re^m$ tal que,

$$\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\|}{\|x-a\|}=0$$

Es claro que para funciones de una variable, la definición anterior coincide con la definición dada por Cauchy. En efecto veamos la equivalencia, supongamos que f es derivable en el sentido de Cauchy en un punto a, es decir el $\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}$ existe y es precisamente $f'(a)$ que implica la siguiente igualdad,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|}=0$$

Puesto que $L(h)=f'(a)\,h$ es una aplicación lineal de $\Re\to\Re$ de esto se deduce que f es diferenciable en a, en el sentido de Frechet. Ahora veamos el reciproco, supongamos que f es diferenciable en a, en el sentido de Frechet, por lo tanto $\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-m(x-a)\|}{\|x-a\|}=0$, puesto que las únicas aplicaciones de $\Re$ en $\Re$ tienen la forma $h\to mh$ e invirtiendo las implicaciones anteriores se tiene que f es derivable en el sentido de Cauchy y $m=f'(a)$.

4.2.7.2 CONSTANTIN CARATHÉODORY (1873-1950)

Constantin Carathéodory, es considerado uno de los más grandes matemáticos de la época moderna. Caratheodory trabajo en diferentes ramas de la matemática, destacándose en el análisis funcional, probabilidad, termodinámica y la teoría de la relatividad, además escribió libros con carácter de texto versados en diferente tópicos de la matemática. En su libro Teoría de funciones de variable compleja volumen I, escribe una definición alternativa para la diferenciabilidad de funciones complejas, la cual es tratada por Kuhn en el marco de las funciones de variable real. Estudios alternativos del concepto de la derivada, han tenido recientemente un florecimiento, gracias a los trabajos y divulgación realizados por diferentes profesores, como Ernesto Acosta y Cesar Delgado los cuales retomaron la idea de Kuhn y extendieron la noción para funciones $f:\ \Re^n \to \Re^m$, A pesar de ello, actualmente no se conoce un texto de cálculo diferencial en una o varias variables que mencione la definición de Caratheodory o haga un desarrollo teórico basado en dicha definición.

Constantine Carathéodory[22], utilizó la definición de continuidad y con base en ella definió la diferenciabilidad de una función en un punto. La caracterización de diferenciabilidad en el sentido de Carathéodory se desprende de observar que la función de pendientes de rectas secantes (ancladas en el punto $(a,\ f(a))$ a la gráfica de la función f, definida por

$$\Phi(x) \ = \ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

toma el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(a,\ f(a))$ *si* Φ *es una función con una discontinuidad removible en* $x=a$. El valor de Φ en a será entonces el valor de la pendiente de la recta tangente y se llamará la derivada de f en a. Con esta motivación entonces se puede establecer la siguiente definición de diferenciabilidad:

f es diferenciable en x=a si existe una función Φ ***continua en a y tal que***

---

[22] Carathéodory, C. *Theory of Functions of a Complex Variable,* Vol. Y, Chelsea, New York, (1954)

$$f(x) - f(a) = \Phi(x)\,(x-a)$$

Al valor de Φ en a lo notamos $f'(a) = \Phi(a)$ (la derivada de f calculada en a).

Como se puede observar, parece que estamos trabajando a la manera de Lagrange, y en efecto, así fuera excepto por la condición explícita de la continuidad de Φ que es el coeficiente p de Lagrange. En cuanto al cálculo de derivadas se procede exactamente como lo hizo Lagrange. Por ejemplo, $f(x) = x^n$ es diferenciable en $x = a$ si existe Φ continua en a tal que

$$x^n - a^n = \Phi(x)\,(x-a)$$

Factorizando el lado izquierdo se tiene:

$$(x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1}\right) = \Phi(x)(x-a)$$

Dividiendo por $(x-a)$, se obtiene la función $\Phi(x) = \left(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1}\right)$que es continua en todo número real. Por tanto, la derivada de f en a es

$$f'(a) = \Phi(a) = na^{n-1}$$

Lagrange no estaba tan equivocado respecto a la idea de su programa de reestructuración del cálculo diferencial. De hecho, en el artículo *Fréchet vs. Carathéodory*[23] publicado en 1994 demostraron que, la definición de Carathéodory es equivalente a la formulada por Fréchet y que la primera ofrece algunas ventajas sobre la segunda. Finalmente, subrayaron una hipótesis inicial de que en este momento se presenta el abandono de una línea de desarrollo conceptual, la de la continuidad como base de la diferenciación y se inicia el predominio del concepto de límite como noción fundamental.

---

[23] Acosta, E. & Delgado, C. *Fréchet vs. Carathéodory*, American Mathematical Monthly, Vol 101, 1994

5 UNA ESTRUCTURA TEORICO CONCEPTUAL DEL CONCEPTO DE DERIVADA BASADA EN LA DEFINICIÓN DE CARATHÉODORY

5.1 PRESENTACIÓN

Este capítulo tiene como propósito dar cuenta del segundo objetivo que se planteó en la propuesta de investigación el cual consiste en caracterizar una estructura teórico conceptual, como fundamento matemático para una propuesta de enseñanza de la derivada basada en la definición de Carathéodory.

Con mucha frecuencia, tanto en la práctica educativa de las matemáticas, como en la investigación didáctica de esta misma disciplina, se hace necesario caracterizar un saber matemático institucional que, tomado como referente de un estado de formación matemática, debe servir como telón de fondo para enmarcar el análisis de diferentes problemas. En nuestra propuesta de investigación se quiere caracterizar el conocimiento matemático deseable en torno al concepto de Derivada utilizando la definición de Carathéodory.

Siguiendo la metodología que se deduce de la definición de estructura teórico conceptual que se presentó en el marco teórico, se identificarán las demandas matemáticas a que debe responder el concepto de derivada en los cursos de cálculo según los planteamientos curriculares en los programas de ingenierías de la Pontificia Universidad Javeriana. Se entiende "*demanda matemática* como cualquier conocimiento matemático (concepto, teorema o proposición, problema) en cuya construcción o solución, según el caso, ingresa el concepto de derivada". Es decir, en este contexto, las demandas se expresan en el lenguaje de las matemáticas, como saber matemático explícito y se pueden clasificar siguiendo la misma taxonomía de los elementos mediante los cuales se construye una ETC.

Estas demandas serán interpretadas para fines de su estructuración matemática, desde una concepción general de formación matemática que se hará explicita como parte de dicha caracterización. En la caracterización matemática de dicha estructura, se analizaran, en particular, los procesos demostrativos de los diferentes teoremas, inscritos en la ETC, como base para dar respuesta al objetivo 3 (Ver planteamiento del problema). Y finalmente aunque la ETC que se caracteriza en este capítulo se propone como fundamento para el curso de cálculo en una variable, su estudio se extenderá al cálculo de varias variables y calculo vectorial, con el fin de incorporar argumentos para dar respuesta al objetivo cuatro de la propuesta de investigación.

Con este fin se realizó un proceso de caracterización de la ETC del concepto de derivada inicialmente con la definición de Cauchy y después usando la definición de Carathéodory, proceso que se describe en los siguientes apartados.

5.2 Caracterizando un conocimiento matemático deseable para fundamentar una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada via Carathéodory

Este proceso de estudio se afrontará en tres fases

a) La selección de los elementos de la estructura.

b) Caracterización matemática de una ETC del concepto de derivada basada en la definición de Carathéodory

c) Las demandas cognitivas y problemas en la construcción personal de la ETC.

5.2.1 Fase a.- La selección de los elementos de la estructura

Esta fase tiene como objetivo la justificación y selección de los contenidos específicos correspondientes a la formulación de los distintos componentes que se articulan en la ETC asociada a la derivada de Carathéodory que se está proponiendo, plasmando así una concepción de formación matemática como estado. El término "*formación matemática* puede ser entendido como un estado o nivel de conocimientos matemáticos (formación matemática como estado), referido a un sujeto concreto, o también como un proceso mediante el cual una persona, construye un conjunto articulado de conocimientos matemáticos (formación matemática como proceso)".

Esta selección se hace desde dos perspectivas, una desde las matemáticas como disciplina científica, apoyándonos en el estudio histórico epistemológico del concepto de derivada realizado anteriormente y, la otra desde la práctica institucional de las matemáticas, inherente al contexto curricular en que se inscribe la propuesta que se quiere fundamentar, en este caso en el programa del curso de cálculo diferencial de la PUJ. En este estudio se identifican algunos de los obstáculos epistemológicos que, en cada época, hicieron lenta la solución de los problemas encontrados y cómo ellos fueron superados. Por otro lado se analizaron las diferentes propuestas de enseñanza del concepto de derivada que se expresan en los textos[24] utilizados en los últimos semestres en la PUJ, en el proceso de enseñanza del curso de Calculo Diferencial, el cual centra sus contenidos en el concepto de derivada, tomando como referente el libro de *Calculus de Apóstol Volumen 1 segunda edición. Editorial reverte*, en su capítulo cuatro titulado calculo diferencial. Esta revisión se hizo con el objetivo de sumar información para consolidar una concepción de Formación Matemática asociada con el concepto de derivada que subyace en las propuestas de enseñanza plasmada en estos textos y tener elementos para justificar la selección de los conceptos que se van a incorporar en la ETC que se propone con la definición de derivada vía Carathéodory.

5.2.1.1 La derivada de Cauchy y la presentación del concepto en los textos modernos

En los libros de texto modernos se observan dos hechos. El primero tiene que ver con el predominio de enfoque de los límites de Cauchy y el segundo con la tendencia a mezclar tradiciones diferentes, por ejemplo las definiciones (ε–δ) de Weirestrass conviven con la presentación de límite de Cauchy sin ser funcionalmente conectadas en el sentido que ellas relacionan niveles de rigor diferentes y necesarios para la comprensión del concepto. Comparemos la presentación de Cauchy y la presentación en el texto "*Cálculo en un variable. Trascendentes Tempranas*" de James Stewart (2001) que es representativo de los textos modernos que se emplean en los cursos de cálculo para ingenierías en Estados Unidos de América y en Colombia.

[24] *James Stewart, Jr. (2001), Calculo una Variable Trascendentes Tempranas (4^a ed.) México D.F.,Mexico:Thomson Learning, Thomas Calculo una variable, undécima edición, Calculo de Purcell-Varberg-Rigdon. Novena Edicion*

Cauchy define el concepto de límite por primera vez en el *Cours d'Analyse* de 1821: "Cuando los valores sucesivos asignados a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo de modo que terminan por diferir de él tan poco como se desee, este último es llamado el límite de los otros. Así por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él."

Y en la tercera *lección,* Capítulo VIII define la derivada así:

"Cuando una función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable x y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la *razón de diferencias*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultánea al límite cero, la razón misma podría converger a un límite ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x. Así por ejemplo, si se toma $f(x) = x^m$, en donde m designa un número entero, la razón entre las diferencias infinitamente pequeñas será

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}\, i + \ldots + i^{m-1}$$

y tendrá por límite la cantidad mx^{m-1}, es decir, una nueva función de la variable x. En general siempre será lo mismo, pero la forma de la nueva función que servirá de límite para la razón $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dependerá de la fórmula de la función propuesta $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia se da a la nueva función el nombre de *función derivada* y se la designa, con ayuda de un apostrofe, mediante la notación *y'* o *f'(x)*."

Esta definición dada por Cauchy en 1823[25] es la misma definición que se utiliza hoy en día en los cursos de cálculo, como límite del cociente incremental $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, con una notación ligeramente diferente y asociada siempre con problemas tales como, encontrar la tangente a una curva, cálculo de velocidades instantáneas, en general como razones instantáneas de cambio y con el cálculo de valores extremos de una función.

Lo mismo ocurre con la definición de límite de Cauchy de 1821. Veamos una versión, en un texto moderno[26] :

Definición Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Y decimos "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

Si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos) tomando x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

El texto afirma que "En la sección 2.4 tendremos una definición más precisa" que es la siguiente:

Definición: Sea f una función definida sobre un intervalo abierto que contiene el número a, excepto cuando a se define a sí misma. Entonces decimos que el ***límite de*** $f(x)$ **cuando** x **tiende *o se aproxima a*** a **es** L y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente numero $\delta > 0$ talque

---

[25] Fecha donde se publican, a partir de los cursos de A.L Cauchy en la Escuela Politécnica, las *Lecciones sobre el Cálculo Infinitesimal*, obra compuesta por 40 lecciones

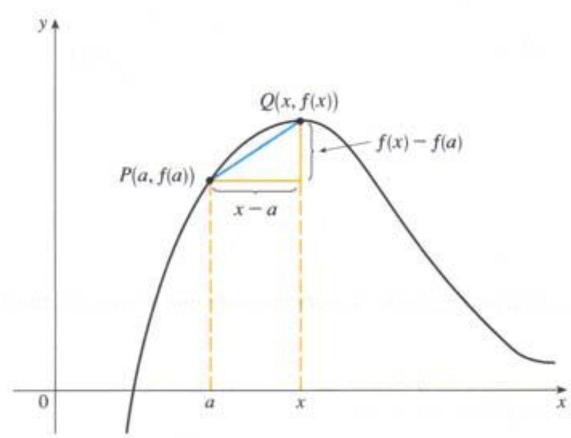
[26] James Stewart, Jr. (2001), *Calculo una Variable Trascendentes Tempranas* (4^a ed.) Mexico D.F.,Mexico:Thomson Learning

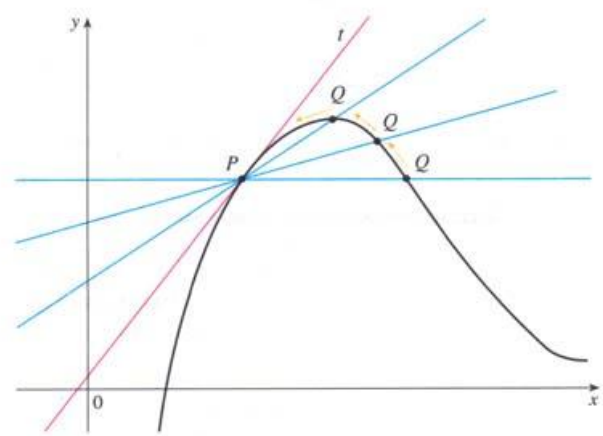
$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \left| x - a \right| < \delta$$

Se espera que esta mezcla permita a los estudiantes comprender este concepto y aplicarlo para el caso de la definición de la derivada.

En términos generales los textos revisados en el capítulo de la Derivada comienzan planteando dos problemas, uno geométrico, el cual consiste en calcular la pendiente de la recta tangente, el cual se ilustra en el libro de *James Stewart, Jr. (2001), Calculo una Variable Trascendentes Tempranas (* 4^a *ed.) México D.F., México: Thomson Learning* de la siguiente manera:

El "problema" de hallar la tangente a la curva C en el punto P(*a*, *f*(*a*)): lo resuelve y lo explica el autor del texto, presentando las gráficas en las que se insinúan procesos de "aproximación" de valores de las pendientes de rectas secantes (en P y Q) de la curva y de esta explicación se concluye la definición de recta tangente, es decir, se reduce a definir la pendiente de la recta tangente como el límite de pendientes de secantes.





La recta que pasa por P(*a*, *f*(*a*)) y cuya pendiente es el límite del cociente de Newton (si existe).

Y el otro mecánico el cual consiste en calcular la velocidad instantánea, resaltando que por "analogía", con el proceso anterior, se ilustra el cálculo de la velocidad instantánea y cambios instantáneos de temperatura. Posterior a los dos momentos anteriores, en los que se presenta el límite del cociente de Newton como un instrumento para resolver los problemas ya mencionados en el texto se define la derivada de una función en “un número *a*”: $f'(a)$.

2 Definición La **derivada de una función f en un número a**, denotada con $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si escribimos $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si, y sólo si, x tiende a a. Por lo tanto, una manera equivalente de enunciar la definición de la derivada, como vimos al hallar rectas tangentes, es

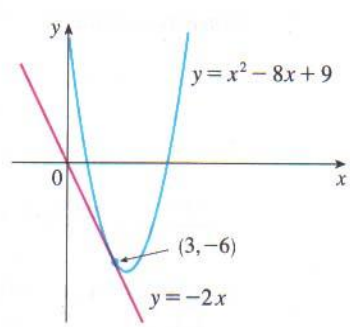
3 $$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Seguidamente los textos en la transposición del concepto de derivada se dedican al manejo de la técnica. Veamos el problema típico de cálculo de la ecuación de la línea tangente a una curva en un punto dado que aparece en este texto:

EJEMPLO Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Con base en el ejemplo 1, sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. De esta forma, una ecuación de la recta tangente es (Fig. 2)

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o} \qquad y = -2x$$



y, finalmente se define la derivada “*como una función de x*”.

Vale la pena destacar, de un lado, que Cauchy define directamente la función derivada, mientras que en los textos contemporáneos se enfatiza la diferencia entre la derivada en un punto y la función derivada. Igualmente que en los textos actuales, aparece explícitamente en la representación simbólica de la definición, el concepto de límite, por eso es pertinente señalar que una de las diferencias bastante notoria entre el texto de Purcell y los otros textos es el tratamiento de la definición de derivada puntual, en Purcell aparece como formas equivalentes a la definición de la derivada y muestra las siguientes igualdades:

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{p\to 0}\frac{f(c+p)-f(c)}{p} \text{ y } f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Es importante resaltar que estas revisiones estuvieron limitadas por la propuesta curricular de PUJ y desde esta perspectiva institucional es significativo conocer los contenidos programáticos de los cursos en los cuales se movilizan los conceptos soporte asociados al concepto de derivada y al mismo concepto de derivada. Los primeros se sitúan en el curso de matemática fundamental y según los planteamientos curriculares que se vienen desarrollando en los programas de ingenierías de la PUJ-Cali, el curso de Matemática fundamental vigente (Enero-Mayo de 2008) da cobertura al siguiente contenido programático:

PROGRAMA DE MATEMATICAS FUNDAMENTALES

Sesión	***Contenido Programático***
1	Los números reales y sus propiedades
2	Introducción a la resolución de ecuaciones
3	Desigualdades

4	Valor Absoluto
5	Exponentes enteros
6	Radicales y exponentes racionales
7	Operaciones con polinomios.
8	Factorización de Polinomios
9	Operaciones con expresiones racionales
10	Números Complejos
11	Concepto de Función: Contextos tabular, por fórmula, por ecuación, a trozos y aplicaciones.
12	Rectas y Funciones lineales**.**
13	Función cuadrática y Ecuación cuadrática
14	Aplicaciones de las Funciones Cuadráticas
15	Gráfica de funciones particulares
16	Más acerca de gráficas de funciones
17	Funciones Polinomiales y Racionales

18	Ecuaciones e inecuaciones con fracciones.
19	Teoremas del residuo, del Factor
20	Resolución de ecuaciones polinómicas
21	Descomposición de Funciones Racionales
22	Círculos y gráfica de funciones con radicales
23	Ecuaciones con radicales y sus gráficas
24	Composición de Funciones
25	Funciones Inversas
26	Funciones Exponenciales y Logarítmicas
27	Leyes de los logaritmos
28	Funciones Exponencial y logarítmica naturales
29	Aplicaciones

La primera parte de este curso, el cual se ofrece en el primer semestre de los programas de la facultad ingenierías, se sitúa principalmente en el concepto de número real, su sistema numérico, operaciones con expresiones racionales, el álgebra de expresiones polinómicas y los números complejos, abriendo camino para su segunda parte la cual tiene como objetivo introducir el concepto de función.

Por otro lado el concepto de derivada se sitúa en el curso de cálculo diferencial, curso ofrecido en el segundo semestre de cada carrera y aborda los siguientes contenidos (Enero-Mayo de 2008).

PROGRAMA DE CALCULO DIFERENCIAL

Sección	Contenido Programático
1	Funciones Trigonométricas
2	Funciones Trigonométricas inversas
3	Funciones Hiperbólicas
4	Introducción al cálculo de límites.
5	Estudio formal de límites y Teorema de límites
6	Límites que incluyen funciones trigonométricas
7	Límites en infinito y límites infinitos
8	Continuidad de funciones
9	La derivada
10	Reglas para encontrar derivadas y derivadas de funciones trigonométricas
11	Regla de la Cadena.

12	Notación de Leibniz
13	Derivadas de orden superior
14	Derivación Implícita
15	Derivadas de exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas
16	Tasas de Cambio relacionadas
17	Diferenciales y aproximaciones
18	Máximos y Mínimos
19	Monotonía, concavidad y máximos y mínimos locales
20	Optimización
21	Elaboración de gráficas

De acuerdo con dicha propuesta nuestra revisión de textos se focalizó en los temas que aparecen a partir de la sesión 9 del cuadro anterior, donde se presenta por primera vez el concepto de derivada. La identificación de demandas estuvo guiada por la secuencia didáctica presentada en los textos seleccionados.

Para la identificación de estas demandas se hizo un análisis matemático centrado en destacar el conjunto de definiciones y proposiciones con sus respectivas pruebas, en el caso de que estas se registren y que movilizan estos textos cuando abordan el concepto de derivada con la definición tradicional, seguidamente se distinguieron los conceptos soporte, como también los convenios notacionales presentes en cada definición y las conversiones entre formas de representación. En particular se destacan las demandas asociadas con representaciones analíticas y su conversión en representación gráfica. (manejo analítico y gráfico de los conceptos de tasa de cambio promedio, pendiente de una recta tangente a una curva y velocidad instantánea, precisando adicionalmente como el límite de las pendientes de las rectas secantes ancladas en el punto de tangencia P, generan la pendiente de la recta tangente a la curva en P).

Los elementos que se describen a continuación constituyen una visión representativa y general de las propuestas de enseñanza del concepto de derivada en los textos revisados y no está sesgada a un texto en particular

5.2.1.2 Conceptos que usualmente ingresan como objeto de estudio en las propuestas tradicionales en la enseñanza de la derivada

Conceptos que ingresan como objeto de estudio en una propuesta de enseñanza del concepto de derivada, propuesta que se puede desarrollar para un curso cualquiera de cálculo diferencial, el cual centra su temática en torno del concepto de derivada.

Derivada puntual $\left(f'(a)\right)$, Función derivada $\left(f'(x)\right)$, función derivable, pendiente de la recta tangente $\left(m_{\tan}\right)$, velocidad instantánea (v), segunda derivada $\left(f''(x)\right)$, derivadas de orden superior, aceleración (a), razón de cambio $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, diferenciales (dx, dy), aproximación lineal $\left(L(x)\right)$, valor extremo, punto crítico, concavidad, punto de inflexión.

Estos conceptos se agruparon en tres conjuntos para efectos de análisis, de la siguiente manera:

1. **Concepto de función derivada y conceptos relacionados:** Derivada puntual, función derivada, función derivable, segunda derivada, derivadas de orden superior, diferenciales, y aproximación lineal.

2. **Conceptos relativos al marco interpretativo del concepto de función derivada:** Pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea, aceleración, razón de cambio.

3. **Conceptos relativos a las aplicaciones geométricas, construcción y análisis de graficas:** valor extremo, punto crítico, concavidad y punto de inflexión.

5.2.1.2.1 Concepto de función derivada y conceptos relacionados.

D1 (CR): Derivada Puntual: *La* ***derivada*** *de una función f en un número* ***a****, denotada con $f'(a)$ es:* $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. *si este límite existe*

D2 (CR): Función Derivada: *La* ***derivada*** *de una función $f(x)$ con respecto a la variable x es la función f' cuyo valor en x es* $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. *Siempre y cuando este límite existe.*

D3 (CR): Función Derivable. *Si f' existe en un punto x particular, decimos que f es derivable (o que* ***tiene derivada****) en x, si f' existe en todos los puntos del dominio de f, decimos que f es diferenciable.*

D4 (CR): Segunda Derivada y Derivadas de orden superior. *Si derivamos la función f', producimos otra función denotada por f'' (léase "f biprima") y denominada segunda derivada de f. A su vez, puede derivarse, y de ahí producir f''', que se denomina tercera derivada de f, y así sucesivamente. La cuarta derivada se denota con $f^{(4)}$, la quinta derivada se denota con $f^{(5)}$, etcétera.*

D5 (CR): Linealizacion, aproximación lineal estándar. Si *f es derivable en $x=a$, entonces la función aproximación $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ es la* ***linealizacion*** *de f en a. La aproximación $f(x)=L(x)$ de f por L es la* ***aproximación lineal estándar*** *de f en a. El punto $x=a$ es el centro de la aproximación.*

D6 (CR): ***Diferencial*** *Sea $y=f(x)$ una función diferenciable. La* ***diferencial dx*** *es una variable independiente.* ***La diferencial dy*** *es $dy=f'(x)dx$.*

5.2.1.2.2 Conceptos relativos al marco interpretativo del concepto de función derivada.

D1 (MI): recta tangente: *La **recta tangente** a al curva* $y = f(x)$ *en el punto* $P(x_0, f(x_0))$ *es la recta que pasa por* P *y cuya pendiente es el numero* $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ *siempre y cuando este límite exista.*

D2 (MI): Razón de Cambio instantánea. *La **Razón de Cambio instantánea** de* f *con respecto a* x *en* x_0 *es la derivada* $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ *siempre y cuando este límite exista.*

D3 (MI): Velocidad instantánea: *La velocidad (velocidad instantánea) es la derivada de la función de posición con respecto al tiempo. Si la posición de un cuerpo en el tiempo t es* $s = f(t)$*, entonces la **velocidad** del cuerpo en el tiempo **t** es* $v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

.

D4 (MI): Aceleración: *La aceleración es la derivada de la función velocidad con respecto al tiempo. Si la posición de un cuerpo en el tiempo t es* $s = f(t)$*, entonces la **aceleración** del cuerpo en el tiempo **t** es* $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$.

5.2.1.2.3 Conceptos relativos a las aplicaciones geométricas, construcción y análisis de gráficas.

D1 Valor Extremo (Máximo local, Mínimo Local)

*Una función f tiene un valor **e**xtrem**o** **(máximo local)** en un punto interior c de su dominio si* $f(x) \leq f(c)$ *para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c.*

*Una función f tiene un valor **e**xtrem**o** **(mínimo local)** en un punto interior c de su dominio si* $f(x) \geq (c)$ *para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c.*

D2 (CG): Punto Crítico. Un punto interior del dominio de una función f *donde* f' *es cero o no está definida es un* ***punto crítico*** *de* f .

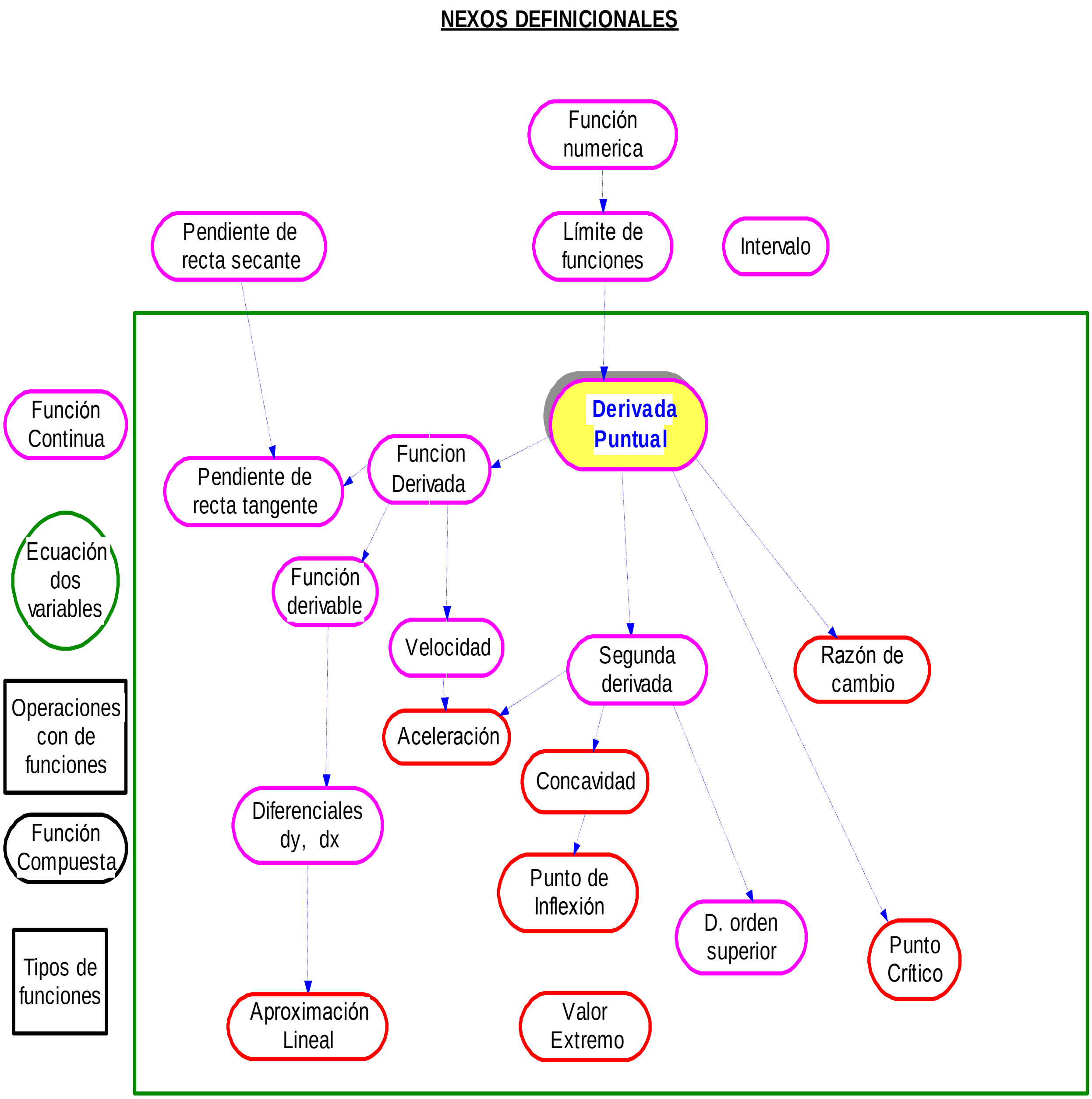
D3 (CG): Cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo. La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ es:

(a) **Cóncava hacia arriba** *en un intervalo abierto I si* f' *es creciente en I.*

(b) **Cóncava hacia abajo** *en un intervalo abierto I si* f' *es decreciente en I.*

D4 (CG) Punto de inflexión. *Un punto donde la gráfica de una función tiene recta tangente y la concavidad cambia es* ***un punto de inflexión***.

5.2.1.3 Visión esquemática de los Nexos Definicionales y conceptos soporte



5.2.1.3.1 Proposiciones que se presentan como objeto de estudio:

P1: Derivabilidad implica continuidad: *Si f tiene derivada en $x = c$, entonces f es continua en c.*

P2: **Propiedad del valor intermedio para derivadas**

Si a y b son dos puntos cualesquiera en un intervalo en el que f es diferenciable, entonces f' toma todos los valores entre $f'(a)$ y. $f'(b)$

P3: Reglas para generales para encontrar derivadas.

1. *Si k es una constante f es una función derivable, entonces $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; esto es, $D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$. En palabras, una constante k, que multiplica, puede "sacarse" del operador D_x.*

2. *Si f y g son funciones derivables, entonces $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; esto es, $D_x[f(x)+g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$. En palabras, la derivada de una suma es la suma de las derivadas.*

3. *Si f y g son funciones derivables, entonces $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; esto es, $D_x[f(x)-g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$.*

4. *Si f y g son funciones derivables, entonces $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$; esto es, $D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$.*

5. *Sean f y g funciones derivables con $g(x) \neq 0$. entonces $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; es decir, $D_x\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$.*

P4: **Reglas para derivar tipo de funciones**

1. *Si $f(x) = k$, donde k es una constante, entonces para cualquier x, $f'(x) = 0$*

2. *Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$,*

3. *Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$*

4. *Las funciones* $f(x)=\operatorname{sen} x$ *y* $g(x)=\cos x$ *son derivables y* $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=-\operatorname{sen} x$.

5. *La función* $f(x)=e^{x}$ *es derivable y* $f'(x)=e^{x}$.

P5: **Regla de la cadena**

Sean $y=f(u)$ *y* $u=g(x)$*. Si* g *es derivable en* x *y* f *es derivable en* $u=g(x)$*, entonces la función compuesta* $f\circ g$*, definida por* $(f\circ g)(x)=f(g(x))$*, es derivable en* x*, y* $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$.

P6: Teorema de la función Inversa:

Sea f *una función continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto* I *que contiene a* a *y asumimos* $f'(a)$ *existe y es diferente de cero. Entonces* $g=f^{-1}$ *es derivable en* $b=f(a)$ *y* $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.

P7: **Teorema de la primera derivada para valores extremos locales**

Sea f una función definida en un intervalo abierto I, si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto $c\in I$ y f es derivable en c, entonces $f'(c)=0$

P8: **Teorema de Rolle:**

Supongamos que f es una función continúa en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en todo punto de su interior (a, b), Si $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) talque $f'(c)=0$

P9: El Teorema del valor medio.

Supongamos que f es una función continúa en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en todo punto de su interior (a, b). Entonces existe al menos un número c en (a, b) donde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

P10: Teorema de monotonía

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

(a) Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

(b) Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

P11: Prueba de la primera derivada para extremos locales.

Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f, y que es derivable en todo punto de algún intervalo que contiene a c, excepto posiblemente en el mismo c. Moviéndose a lo largo de c de izquierda a derecha.

(a) Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(b) Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(c) Si $f'(x)$ no cambia signo en c (esto es, si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c) entonces f no tiene un extremo local en c

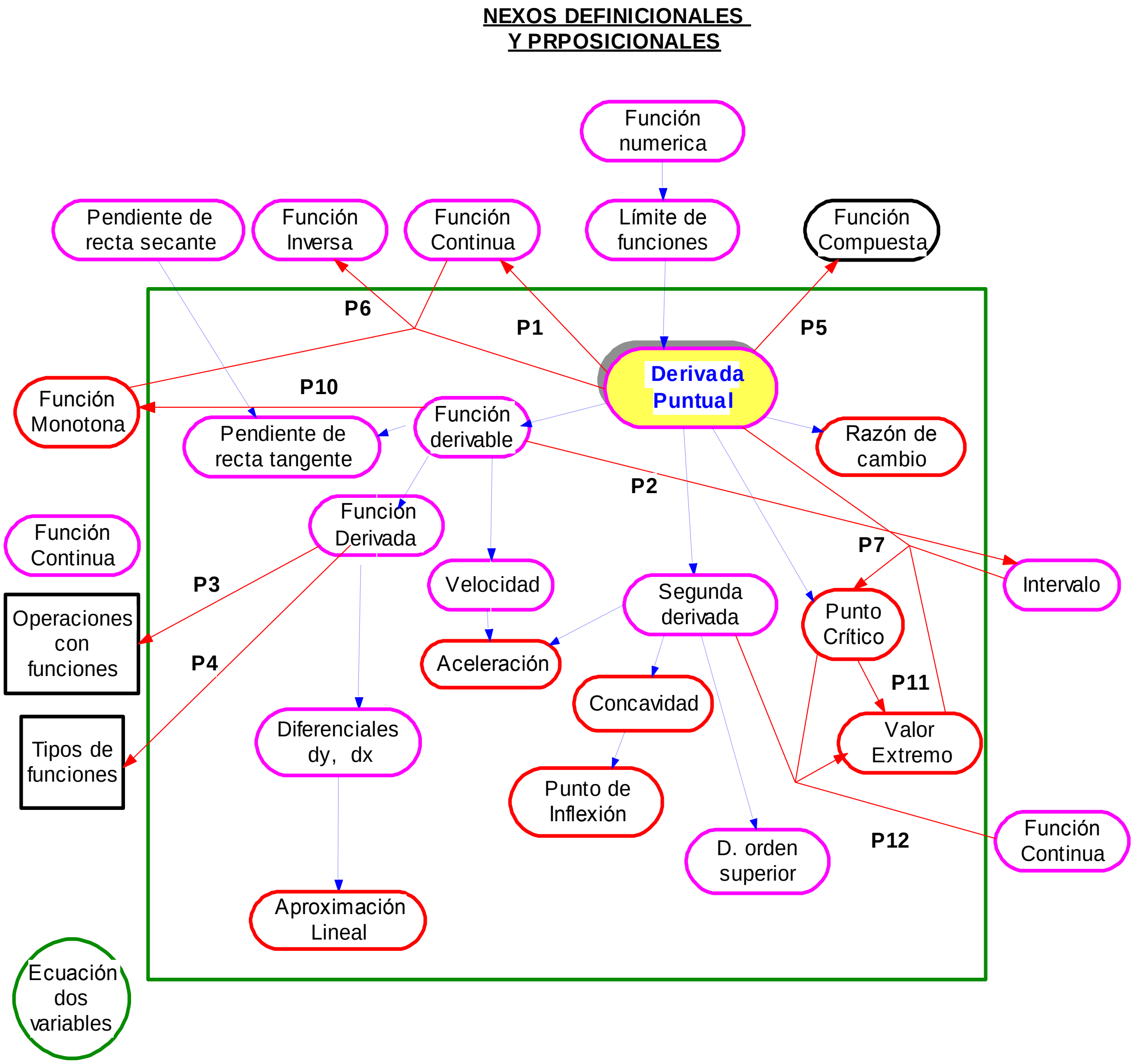
P12: Teorema de concavidad

Supongamos que $f''(x)$ es continua en un intervalo abierto que contiene a $x = c$

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, f tiene un máximo local en $x = c$.

(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo local en $x = c$.

5.2.1.4 Visión general de la ETC asociada con el concepto de Derivada



5.2.1.4.1 Problemas de base

En este apartado señalamos los problemas de base fundamentales en la construcción del concepto de derivada, los *problemas de base*: "Están referidos a los problemas que se espera el estudiante esté en condiciones de resolver al culminar el estudio del tema abordado.” para cualquier propuesta que se implemente en un proceso de enseñanza-aprendizaje de un concepto.

Para efectos del análisis de estos problemas de base al igual que los conceptos que ingresan como objeto de estudio en las propuestas tradicionales de la enseñanza de la derivada, estos se agruparon en tres conjuntos:

Conceptos	**Problema de Base**
Concepto de derivada puntual, función derivada y conceptos relacionados: función derivable, derivadas de orden superior, aproximación lineal, diferenciales.	• Encontrar la derivada de una $f(x)$ utilizando las reglas de la derivada.
Conceptos relativos al marco interpretativo del concepto de función derivada: La pendiente de la recta tangente, Razones de cambio, El concepto de velocidad y el concepto de aceleración.	• Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado. • Problemas de aplicación razones de cambio de variables relacionadas • Problema de aplicación, problemas de optimización, encontrar valores extremos máximos y mínimos locales y valores extremos absolutos.
Conceptos asociados a la construcción y análisis de graficas: Punto crítico, concavidad y punto de inflexión.	• Trazado y análisis de curvas.

5.2.1.4.2 Procesos matemáticos asociados con la ETC del concepto de derivada

En este apartado nos proponemos describir los procesos de justificación y prueba a cada uno de los nexos proposicionales que se proponen como objeto de estudio para una propuesta de enseñanza del concepto de derivada, y además describir la solución que algunos textos proponen a los problemas de base identificados que son inherentes a la estructura teórico conceptual identificada anteriormente.

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional **1**

P1: Diferenciabilidad implica continuidad: *Si f tiene derivada en $x=c$, entonces f es continua en c.*

El argumento principal utilizado es la construcción de la definición de derivada mediante el límite, para dar la conclusión $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ utilizando la hipótesis de que $f'(c)$ existe.

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional **2**

P2: Propiedad del valor intermedio para derivadas

Si a y b son dos puntos cualesquiera en un intervalo donde f es diferenciable, entonces f' toma todos los valores entre $f'(a)$ y. $f'(b)$

No se presenta ninguna justificación de este nexo. Aunque se explica que significa: "Una función no puede ser una derivada en un intervalo, a menos que satisfaga la propiedad del valor intermedio en dicho intervalo".

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional **3 y 4**

P3: Reglas para generales para encontrar derivadas.

6. *Si k es una constante f es una función derivable, entonces $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; esto es, $D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$. En palabras, una constante k, que multiplica, puede "sacarse" del operador D_x.*

7. *Si* f *y* g *son funciones derivables, entonces* $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$; *esto es,* $D_x\left[f(x)+g(x)\right]=D_x f(x)+D_x g(x)$. *En palabras, la derivada de una suma es la suma de las derivadas.*

8. *Si* f *y* g *son funciones derivables, entonces* $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$; *esto es,* $D_x\left[f(x)-g(x)\right]=D_x f(x)-D_x g(x)$.

9. *Si* f *y* g *son funciones derivables, entonces* $(f\cdot g)'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$; *esto es,* $D_x\left[f(x)g(x)\right]=f(x)D_x g(x)+g(x)D_x f(x)$.

10. *Sean* f *y* g *funciones derivables con* $g(x)\neq 0$. *entonces* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; *es decir,* $D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_x f(x)-f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$.

P4: **Reglas para derivar tipo de funciones**

6. *Si* $f(x)=k$, *donde* k *es una constante, entonces para cualquier* x, $f'(x)=0$

7. *Si* $f(x)=x$, *entonces* $f'(x)=1$,

8. *Si* $f(x)=x^n$, *donde* n *es un entero positivo, entonces* $f'(x)=nx^{n-1}$

9. *Las funciones* $f(x)=\operatorname{sen}x$ *y* $g(x)=\cos x$ *son derivables y* $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=-\operatorname{sen}x$.

10. *La función* $f(x)=e^x$ *es derivable y* $f'(x)=e^x$.

En general en los textos revisados se demuestra cada una de las reglas que hacen parte del nexo proposicional 3 y 4.

Demostración de las reglas **P3**: 1, 2,3, 4 y 5: Utiliza la definición de derivada mediante límite para su demostración y para la regla **P4:** 1 algunos textos se ayudan de una visualización para su justificar geométricamente que la pendiente de una recta horizontal es cero en todos sus puntos y para la regla **P3. 4** presentan una ilustración geométrica con la ayuda del área de un rectángulo.

Para la demostración de la regla **P4:** 3: Realizan dos tipos de demostración para el caso en el que la potencia es un entero positivo. En la primera utiliza la factorización de $z^n - x^n$ y la forma alternativa de la definición de la derivada $f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ y en la segunda utiliza la definición de la derivada mediante el límite y la expansión de $(x+h)^n$.

Para el caso en el que la potencia es un entero negativo utiliza la regla 6 del nexo proposicional 3.

Para el caso en el que la potencia es un racional utiliza en la definición de raíz ene-sima y la regla de la cadena.

Demostración de la **regla 4**: Utiliza la definición de derivada mediante límite para $f(x)=u(x)+v(x)$ y combina las reglas de la suma y múltiplo constante para la regla de la diferencia, además demuestra la regla de la suma para sumas de más de dos funciones mediante inducción matemática.

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional **5**

P5: **Regla de la cadena**

Sean $y = f(u)$ *y* $u = g(x)$. *Si* g *es derivable en* x *y* f *es derivable en* $u = g(x)$, *entonces la función compuesta* $f \circ g$, *definida por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, *es derivable en* x, *y* $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

En general en los textos revisados excepto el texto de apóstol señalan que esta prueba “requiere un conocimiento detallado del sistema de números reales” por lo tanto algunos remiten al lector a uno de sus apéndices y presentan una demostración o "prueba" intuitiva de la regla de la cadena, donde el argumento que utiliza es escribir $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ y tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$, pero recalca que en el único caso en el que este argumento falla es si $\Delta u = 0$, (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre cero, donde Δu es el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x.

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional **6**

P6: Teorema de la función Inversa:

Sea f una función continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto I que contiene a a y asumimos $f'(a)$ existe y es diferente de cero. Entonces $g = f^{-1}$ es diferenciable en $b = f(a)$ y $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

La prueba de este teorema se centra en la composición de funciones y la técnica de la derivación implícita

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional **7**

P7: **Teorema de la primera derivada para valores extremos locales**

Sea f una función definida en un intervalo abierto I, si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto $c \in I$ y f es diferenciable en c, entonces $f'(c) = 0$

Para la prueba de esta proposición se utiliza una demostración formal, inicialmente para el caso en que f posea un máximo, donde el argumento principal es la ley de la tricotomía, ya que demuestra que $f'(c)$ no puede ser positiva ni negativa y por lo tanto debe ser cero, utilizando la forma alternativa de la definición de la derivada, el $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Presentando algunas veces un registro gráfico, señalando el valor máximo local. Para el caso en que f posea un mínimo sólo advierte que se procede de igual forma tomando que $f(x) \geq f(c)$

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional 8

P8: **Teorema de Rolle:**

Supongamos que $y = f(x)$ es una función continúa en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en todo punto de su interior (a, b), Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) talque $f'(c) = 0$

Para la demostración del teorema de Rolle los textos en su gran mayoría utilizan una demostración formal donde los argumentos son: La continuidad de la función f en el intervalo cerrado $[a, b]$ que implica que f alcanza sus valores máximos y mínimos absolutos en el intervalo cerrado $[a, b]$, el nexo proposicional **7** y la regla **1** del nexo proposicional **4.** Además se apoyan de una justificación visual para la cual interpreta el teorema con que una curva diferenciable tiene al menos una tangente horizontal entre cualesquiera dos puntos.

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional **9**

P9: El Teorema del valor medio.

Supongamos que f es una función continúa en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en todo punto de su interior (a, b). Entonces existe al menos un número c en (a, b) donde $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

En la demostración de este teorema se utiliza una demostración formal apoyada en un registro gráfico, donde se muestra geométricamente, que el significado del teorema del valor medio dice que en algún sitio de *A* y *B* la curva tiene al menos una tangente paralela a la cuerda *AB.* El argumento principal es el nexo proposicional **8**, después de utilizar la formula punto-pendiente de una recta, la cual se construye para aplicar este a la función:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional 10

P10: Teorema de monotonía

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b)

(a) Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

(b) Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

La demostración de esta proposición apoya su argumento principal en las condiciones del nexo proposicional **9** y en la definición de función creciente y decreciente.

Proceso de Justificación y Prueba asociado al nexo proposicional 11

P11: Prueba de la primera derivada para extremos locales.

Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f, y que es derivable en todo punto de algún intervalo que contiene a *c*, excepto posiblemente en el mismo *c*. Moviéndose a lo largo de c de izquierda a derecha.

(c) Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en *c*, entonces f tiene un mínimo local en *c*.

(d) Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en *c*, entonces f tiene un máximo local en *c*.

(e) Si $f'(x)$ no cambia signo en c (esto es, si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c) entonces f no tiene un extremo local en *c*.

Para la prueba de esta proposición algunos textos presentan un registro grafico donde se indica que la primera derivada de una función dice como sube y como baja la gráfica de una función, donde hay máximos y mínimos locales y donde a pesar que la primera derivada es cero no hay un extremo local. La demostración se centra fundamentalmente en el nexo proposicional 10.

P12: Teorema de concavidad

Supongamos que $f''(x)$ es continua en un intervalo abierto que contiene a $x = c$

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, f tiene un máximo local en $x = c$

(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo local en $x = c$

La prueba de esta proposición se centra en el nexo proposicional 11, por ejemplo la parte (1) si $f''(c) < 0$, entonces $f''(x) < 0$ en algún intervalo abierto *I* que contenga a c y por el nexo proposicional 10 f' decrece en I. Como $f'(c) = 0$, el signo de

f' cambia de positivo a negativo en *c*, de manera que según el nexo proposicional 11

f tiene un máximo local en $x = c$.

5.2.2 Fase b. Caracterizacion matematica de una ETC del concepto de derivada basada en la definicion de carathéodory

Como su nombre lo indica esta fase se orienta a describir la estructura teórico conceptual que se propone como objeto de aprendizaje para el alumno, está referida, por lo tanto, a identificar y describir los distintos componentes que se toman en cuenta en la definición de ETC: Conceptos, nexos entre conceptos (definicionales y proposicionales), incluyendo conexiones entre conceptos matemáticos y conceptos no matemáticos (modelos de matematizacion socializados), sistemas semióticos de representación matemática, problemas de base y procesos matemáticos de justificación y prueba, mediante los cuales se legitiman nexos proposicionales notables y de resolución de problemas de base, tal como se expresan en la propuesta de enseñanza objeto de estudio.

5.2.2.1 La Derivada de Carathéodory como elemento de una transposición Didáctica alternativa

Constantine Carathéodory (1954) formuló una definición de derivada que se fundamenta en el *concepto de continuidad* y que según Acosta & Delgado (1994) permite desarrollar el programa, que en 1772 se había planteado Lagrange sin éxito porque no disponía de una definición explícita de continuidad de una función en un punto, buscando formular una «*Teoría de las funciones analíticas. Conteniendo los principales teoremas del cálculo diferencial sin hacer uso de lo infinitamente pequeño, ni de cantidades evanescentes ni de límites o fluxiones, y reducido al arte del análisis algebraico de las cantidades finitas*», como reza el título de su obra *Théorie des functions analytiques* (1797, *Euvres*, 9).

Como afirma Delgado, "Lagrange, posiblemente tenía en mente la continuidad de la función *p* en *x*; pero, obviamente no disponía de una definición de continuidad que le permitiera definir la derivada, como lo hizo Carathéodory[27] en 1954. En efecto, él utilizó la definición de continuidad y con base en ella definió la diferenciabilidad de una función en un punto. La caracterización de diferenciabilidad en el sentido de Carathéodory se desprende de observar que la función de pendientes de rectas secantes (ancladas en el punto (a, f(a)) a la gráfica de la función f, definida por

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

toma el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en *(a, f(a)) si* ϕ *es una función con una discontinuidad removible en x=a*." (1998, p. 228).

Definición (funciones $f : \Re \to \Re$):

Sea f una función definida en un intervalo abierto $U \subseteq \Re$, y a un punto en U. f es diferenciable en a, en el sentido de Caratheodory si existe una función $\Phi_f(x, a)$, continua en a, que satisface la relación:

$$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x - a) \quad \text{Para todo} \quad x \in U$$

El número $\Phi_f(a, a)$ es la derivada de Carathéodory de f en a.

[27] Carathéodory, C. *Theory of Functions of a Complex Variable,* Vol. Y, Chelsea, New York, (1954)

Esta definición se extiende Naturalmente a funciones vectoriales interpretando la igualdad de la definición como una ecuación matricial. Así:

Definición (Campos escalares y Campos vectoriales):

Sea f una función de $\Re^n$ en $\Re^m$ y a un punto en $\Re^n$, f es diferenciable en a en el sentido de Caratheodory si existe:

$$\phi_f : \Re^n \to M_{mxn} \quad \text{Continua en } a,$$

Tal que:

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a)$$

Si f una función de $\Re^n$ en $\Re^m$ y a un punto en $\Re^n$ se puede interpretar la definición según Caratheodory así: identificando $f(x) - f(a)$ como un vector columna de $\Re^m$ y $(x-a)$ un vector columna de $\Re^n$ por lo tanto $\phi_f(x)$ se puede interpretar como una matriz $n\,x\,m$ para que el producto de matrices y la igualdad tenga sentido.

Haciendo énfasis en el cambio del enfoque límite por el de continuidad. Este último, como un concepto que permite formalizar la propiedad de ciertas funciones de preservar la "proximidad" de los valores de la función cuando la variable independiente toma valores próximo a un valor *a*.

5.2.2.2 La Derivada de Carathéodory

Definición 1: Derivada de Carathéodory

Sea f una función definida en un intervalo abierto U, y a un punto en U. f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory si existe una función $\Phi_f\left(x, a\right)$, continua en a, que satisface la relación:

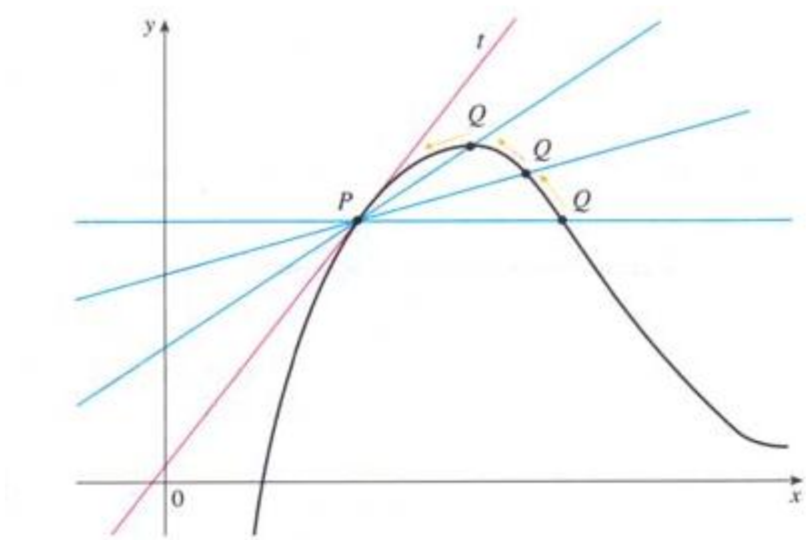
$$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x - a) \quad \text{Para todo} \quad x \in U$$

El número $\Phi_f(a, a)$ es la derivada de Carathéodory de f en a, que en adelante denotaremos $\Phi_f(a)$ y la función derivada de f en el sentido de Carathéodory se denotara $\Phi_f(x)$

La función $\Phi_f\left(x, a\right)$ es la función de pendientes de rectas secantes (ancladas en el punto (*a*, *f(a)*) a la gráfica de la función *f* como lo ilustra la figura, por lo tanto $\Phi_f(x)$ está definida por

$$\Phi_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y toma el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en (*a*, *f(a)*) *si* Φ *es una función con una discontinuidad removible en* $x = a$.



En la construcción del concepto de derivada con la definición de Carathéodory, se tiene como eje central la definición del concepto de continuidad de Weierstrass de una función f en el punto $x = p$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \delta > 0 (\forall x \in D_f \; (|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon))\right)$$

Y es importante identificar que el concepto de continuidad de Weierstrass de una función f en el punto $x = p$, es un concepto soporte el cual la propuesta de enseñanza-aprendizaje supone disponible, es decir, el estudiante tiene este concepto construido e interactúa con éxito en situaciones donde se moviliza este concepto.

Ejemplo: Aplicación de la definición

Derivar en el sentido de Carathéodory la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $x \neq 1$

Solución

f es derivable en el sentido de Carathéodory si existe una función $\Phi_f(x, a)$, continua en a, que satisface la relación:

$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x - a)$ Para todo $x \in U$

Por lo tanto tenemos:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{a}{a-1} = \Phi_f(x;a)(x-a)$$

Simplificando el lado izquierdo de la igualdad se tiene:

$$-\frac{1}{(x-1)(a-1)}(x-a) = \Phi_f(x,a)(x-a)$$

Observando la última expresión la función candidata para $\Phi_f(x, a)$ es:

$$\Phi_f(x,a) = -\frac{1}{(x-1)(a-1)} .$$

Probemos que $\Phi_f(x,a) = -\dfrac{1}{(x-1)(a-1)}$ es continua en a.

Es claro que el dominio de f son todos los reales excepto el 1, por lo tanto $x \neq 1$ y $a \neq 1$ en cualquier otro caso la función $\Phi_f(x, a)$ es continua por que el cociente y el producto de funciones continuas es continua.

Concluimos que la derivada de caratheodory de f en a es:

$$\Phi_f(a,a) = -\frac{1}{(a-1)(a-1)} = -\frac{1}{(a-1)^2} .$$

$$\Phi_f(a) = -\frac{1}{(a-1)^2}$$

$$\Phi_f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Ejemplo: Derivada de la función raíz cuadrada

(a) Encontrar la derivada en el sentido de Caratheodory de la función $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$

(b) Encontrar la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$

Solución:

f es derivable en el sentido de Caratheodory si existe una función $\Phi_f(x, a)$, continua en a, que satisface la relación:

$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x-a)$ Para todo $x \in U$

Por lo tanto tenemos:

$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \Phi_f(x, a)(x-a) \quad x \neq a$

Multiplicando por la expresión: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ el lado izquierdo de la última igualdad se tiene:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{a})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \Phi_f(x, a)(x-a)$$

Simplificando se tiene: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}(x-a) = \Phi_f(x, a)(x-a)$

Observando la última expresión la función candidata para $\Phi_f(x, a)$ es:

$$\Phi_f(x,a) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\ .$$

Concluimos que la derivada de Carathéodory de f en a es:

$$\Phi_f(a,a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ .\ \text{Y} \quad \Phi_f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(b) La pendiente de la recta tangente a la curva en $x=4$ es

$$\Phi_f(4,4) = \Phi_f(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

La recta tangente es la recta que pasa por el punto $(4,\ 2)$ y tiene pendiente $1/4$

$y-2=\frac{1}{4}(x-4)$ o equivalentemente $y=\frac{1}{4}x+1$.

Teorema 1: Diferenciabilidad implica continuidad.

Si f tiene derivada en $x=a$ en el sentido de Carathéodory, entonces f es continua en $x=a$

Demostración:

Por hipótesis f es derivable en el sentido de Carathéodory en $x=a$ por lo tanto existe una función $\Phi_f(x,a)$, continúa en a, que satisface la relación:

$f(x)-f(a) = \Phi_f(x,a)(x-a)$ Para todo $x \in U$

Despejando $f(x)$ de la igualdad se tiene:

$$f(x) = f(a) + \Phi_f(x,a)(x-a)$$

Por el álgebra de las funciones continuas es claro que $f(x)$ es continua en $x=a$.

Teorema 2: Propiedad del valor intermedio para derivadas

Si a y b son dos puntos cualesquiera en un intervalo donde f es diferenciable en el sentido de Carathéodory, entonces $\Phi_f(x)$ toma todos los valores entre $\Phi_f(a)$ y $\Phi_f(b)$.

Demostración

Para demostrar el anterior teorema se probaran las siguientes condiciones

(a) - Si $\min\{f(x): x \in [a,b]\} = f(a)$, entonces $\Phi_f(a) \geq 0$.

- Si $\min\{f(x): x \in [a,b]\} = f(b)$, entonces $\Phi_f(b) \leq 0$.

(b) Si $\Phi_f(a) < 0$ y $\Phi_f(b) > 0$, entonces debe existir un $x \in (a,b)$ en dónde $\Phi_f(x) = 0$.

(c) Si $\Phi_f(a) < c < \Phi_f(b)$, entonces existe un $x \in (a,b)$ en donde $\Phi_f(x) = c$

Prueba (a)

Como f es diferenciable en el sentido de Carathéodory, entonces f es continua y alcanza su máximo y su mínimo en $[a,b]$.

Supongamos que el min. $\{f(x): x \in [a,b]\} = f(a)$, f es diferenciable en el sentido de Carathéodory en a, por tanto se tiene la siguiente igualdad:

$$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x-a)$$

Como $f(a)$ es el mínimo de f, la expresión de la izquierda es positiva y $x \geq a$ se tiene entonces que $\Phi_f(a) \geq 0$.

Ahora supongamos que el min. $\{f(x): x \in [a,b]\} = f(b)$, f es diferenciable en el sentido de Carathéodory en b, por tanto se tiene la siguiente igualdad:

$$f(x) - f(b) = \Phi_f(x, b)(x-b)$$

Como $f(b)$ es el mínimo de f, la expresión de la izquierda es positiva y $x \leq b$ se tiene entonces que $\Phi_f(b) \leq 0$.

Prueba (b)

Supongamos que $\Phi_f(a) < 0$ y $\Phi_f(b) > 0$. De hecho, pueden existir muchos valores de x entre a y b tales que $\Phi_f(x) = 0$. Vamos a encontrar uno determinado, el mayor x para el cual $\Phi_f(x) = 0$.

Sea K el conjunto de todos los puntos del intervalo $[a,b]$ para los que $\Phi_f(x) \leq 0$. Note que hay por lo menos un punto K en [*a*,*b*], ya que $\Phi_f(a) < 0$.

Luego, K es un conjunto no vacío. K Está acotado superiormente pues todos los puntos de K están en $[a,b]$ y $\Phi_f(b) > 0$.

Como todo conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente tiene un extremo superior, designemos a éste con c. Se debe probar entonces que $\Phi_f(c) = 0$.

Existen solo tres posibilidades $\Phi_f(c) < 0$, $\Phi_f(c) > 0$ o $\Phi_f(c) = 0$.

Si $\Phi_f(c) > 0$ entonces hay un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ o $(c-\delta, c]$ si $c = b$, tal que $f(x)$ es positivo si x está en este intervalo.

Por tanto, ningún punto de K puede estar a la derecha de $c-\delta$, por lo que $c-\delta$ es una cota superior del conjunto K. Pero $c-\delta < c$ y c es el extremo superior de K. Luego la desigualdad $\Phi_f(c) > 0$ es imposible.

Si $\Phi_f(c) < 0$, entonces hay un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ o $[c, c+\delta)$ si $c = a$, en el que f es negativa, por lo $f(x) < 0$ que para algún $x > c$, lo que contradice el hecho que c es una cota superior de K.

Luego $\Phi_f(c) < 0$ también es imposible, quedando únicamente la posibilidad de $\Phi_f(c) = 0$. Además, $a < c < b$ puesto que $\Phi_f(a) < 0$ y $\Phi_f(b) > 0$.

Queda demostrada la parte (b).

Prueba (c)

Supongamos $\Phi_f(a) < \Phi_f(b)$, y sea c un valor cualquiera que se encuentra entre $\Phi_f(a)$ y $\Phi_f(b)$. Sea g una función definida en el intervalo $[a,b]$ de la siguiente manera: $g(x) = f(x) - cx$. Se tiene que g es diferenciable en el sentido de Carathéodory por tanto g es continua en cada punto de $[a,b]$, pues es la diferencia de dos funciones continuas, y además:

$$\Phi_g(a) = \Phi_f(a) - c < 0$$

$$\Phi_g(b) = \Phi_f(b) - c > 0$$

Pues $\Phi_f(a) < c < \Phi_f(b)$.Aplicando el teorema de Bolzano a la función $\Phi_g(x)$ se tiene que $\Phi_g(k) = 0$ para algún k entre a y b, lo que significa $\Phi_f(k) = c$, quedando demostrada la parte (c).

Así queda demostrado el teorema y $\Phi_f(x)$ cumple la propiedad de los valores intermedios.

Teorema 3: Reglas de diferenciación.

En esta sección se introducen algunas reglas que nos permitan derivar una gran variedad de funciones. Una vez que las hayamos comprobado seremos capaces de derivar funciones sin tener que aplicar la definición de derivada en el sentido de Carathéodory.

Potencias, múltiplos, sumas y diferencias.

La primera regla de diferenciación sostiene que la derivada de toda función constante es cero.

REGLA 1 Derivada de una función constante

Si f es una función constante $f(x) = c$ entonces la derivada de en el sentido de Carathéodory de f en a es $\Phi_f(a, a) = 0$

Demostración

Si f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_f(x, a)$ continua en a, que satisface la relación:

$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x-a)$ Para todo $x \in U$

Como $f(x) = c$ se tiene: $c - c = \Phi_f(x, a)(x-a)$

$0 = \Phi_f(x, a)(x-a)$ por lo que la factorización $0 = 0(x-a)$ candidatiza a

$\Phi_f(x, a)$ ser la función idénticamente cero, que es una función continua en $x = a$

Por lo tanto $\Phi_f(a, a) = 0$

REGLA 2 regla de potencias para enteros positivos.

Si n es un entero positivo, entonces la derivada en el sentido de Carathéodory de $f(x) = x^n$ en $x = a$ es $\Phi_f(x, a) = nx^{n-1}$

Demostración:

Si f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_f(x, a)$ continua en a, que satisface la relación:

$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x-a)$ Para todo $x \in U$

como $f(x) = x^n$ sustituyendo en la igualdad se tiene:

$x^n - a^n = \Phi_f(x, a)(x-a)$ Factorizando la expresión de la izquierda

Se sigue que, $(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1}) = \Phi_f(x, a)(x-a)$ Observando la expresión la función candidata para $\Phi_f(x, a)$ es:

$\Phi_f(x, a) = (x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})$ que claramente por ser un polinomio es continua en $x = a$ y concluimos que $\Phi_f\left(x, a\right) = nx^{n-1}$ y $\Phi_f(a, a) = na^{n-1}$

y $\Phi_f(x) = nx^{n-1}$.

REGLA 3

Si f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory y c es una constante entonces la función $g = cf$ es derivable en el sentido de Carathéodory y

$$\Phi_g\left(x, a\right) = c.\Phi_f\left(x, a\right)$$

Demostración:

Si g es diferenciable en a, en el sentido de caratheodory existe una función $\Phi_g\left(x, a\right)$ continua en a, que satisface la relación:

$g(x) - g(a) = \Phi_g(x, a)(x - a)$ por hipótesis se sabe que $g(x) = cf(x)$, sustituyendo se tiene $cf(x) - cf(a) = \Phi_g(x, a)(x - a)$ factorizando la expresión y usando el hecho de que la función f es derivable en el sentido de Carathéodory

$$c(f(x) - f(a)) = \Phi_g(x, a)(x - a)$$

$$c\ \Phi_f(x, a)(x - a) = \Phi_g(x, a)(x - a)$$

Observando la expresión la función candidata para $\Phi_g\left(x, a\right)$ es:

$\Phi_g\left(x, a\right) = c.\Phi_f\left(x, a\right)$ que es una función continua en $x = a$ por el hecho de que el producto de funciones continua es continua y $\Phi_g(a, a) = c\Phi_f(a, a)$.

REGLA 4 Regla de la derivada de una suma

Si f y g son dos funciones derivable en el sentido de Carathéodory en $x=a$ entonces la función $h= f+g$ es derivable en el sentido de Carathéodory en $x=a$ y $\Phi_h\left(x,\, a\right)=\Phi_f\left(x,\, a\right)+\Phi_g\left(x,\, a\right)$.

Demostración:

Si h es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_h\left(x,\, a\right)$ continua en a, que satisface la relación:

$h(x)-h(a) = \Phi_h(x,\, a)(x-a)$ Por hipótesis se sabe que $h(x) = g(x)+ f(x)$,

Sustituyendo se tiene $(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a)) = \Phi_h(x,\, a)(x-a)$ conmutando factorizando y utilizando el hecho que f y g son dos funciones derivable en el sentido de carathedory en $x=a$ se tiene:

$(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a)) = \Phi_h(x,\, a)(x-a) =$

$(\Phi_f(x,\, a)+\Phi_g(x,\, a))(x-a) =\Phi_h(x,\, a)(x-a)$ Observando la expresión la función candidata para $\Phi_h\left(x,\, a\right)$ es:

$\Phi_h\left(x,\, a\right)=\Phi_f\left(x,\, a\right)+\Phi_g\left(x,\, a\right)$ que es una función continua en $x=a$ por el hecho de que la suma de funciones continua es continua y $\Phi_h\left(a,\, a\right)=\Phi_f\left(a,\, a\right)+\Phi_g\left(a,\, a\right)$.

REGLA 5 Regla de la derivada de un producto.

Si f y g son dos funciones derivable en el sentido de Carathéodory en $x=a$ entonces la función $h= fg$ es derivable en el sentido de Carathéodory en $x=a$ y .

$$\Phi_h\left(x,\, a\right)=\Phi_f\left(x,\, a\right)g(x)+\Phi_g\left(x,\, a\right)f(a)$$

Demostración:

Si h es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_h(x, a)$ continua en a, que satisface la relación:

$h(x)-h(a) = \Phi_h(x, a)(x-a)$ Por hipótesis se sabe que $h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$,

Sustituyendo se tiene $(f(x)g(x))-(f(a)g(a)) = \Phi_h(x, a)(x-a)$ sumando y restando al lado izquierdo de la igualdad la siguiente expresión: $(f(a)g(x))-(f(a)g(x))$ se tiene: $(f(x)g(x))-(f(a)g(x))+(f(a)g(x))-(f(a)g(a)) = \Phi_h(x, a)(x-a)$

Conmutando factorizando y utilizando el hecho que f y g son dos funciones derivables en el sentido de Carathéodory en $x=a$ se tiene:

$((f(x)-(f(a))g(x))+((g(x))-g(a))f(a) = \Phi_h(x, a)(x-a) =$

$(\Phi_f(x, a)g(x)+\Phi_g(x, a)f(a))(x-a) = \Phi_h(x, a)(x-a)$ Observando la expresión la función candidata para $\Phi_h(x, a)$ es:

$\Phi_h(x, a) = \Phi_f(x, a)g(x)+\Phi_g(x, a)f(a)$ que es una función continua en $x=a$ por el hecho de que la suma y producto de funciones continua es continua y $\Phi_h(a, a) = \Phi_f(a, a)g(a)+\Phi_g(a, a)f(a)$.

REGLA 6 Regla de la derivada de un cociente

Si f y g son dos funciones derivable en el sentido de Carathéodory en $x=a$ y $g(x)\neq 0$ entonces la función $h = \dfrac{f}{g}$ es derivable en el sentido de Carathéodory en $x=a$ y .

Demostración:

Si h es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_h\left(x,\, a\right)$ continua en a, que satisface la relación:

$h(x)-h(a) \ = \Phi_h(x,\, a)(x-a)$ Por hipótesis se sabe que $h(x) = \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$,

Sustituyendo se tiene $\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(a)}{g(a)} = \Phi_h(x,\, a)(x-a)$ sumando al lado izquierdo de la igualdad y adicionando en el numerador la siguiente expresión: $(f(a)g(a))-(f(a)g(a))$ se tiene: $\dfrac{f(x)g(a)-g(x)f(a)+f(a)g(a)-f(a)g(a)}{g(x)g(a)}$

Conmutando factorizando y utilizando el hecho que f y g son dos funciones derivables en el sentido de Carathéodory en $x=a$ se tiene:

$$\frac{(f(x)-f(a))g(a)-(g(x)-g(a))f(a)}{g(x)g(a)} = \frac{(\Phi_f(x,a)g(a)-\Phi_g(x,a)f(a))}{g(x)g(a)}(x-a)$$

$=$ $\Phi_h(x,\, a)(x-a)$ Observando la expresión la función candidata para $\Phi_h\left(x,\, a\right)$ es:

$\Phi_h\left(x,\, a\right) = \dfrac{(\Phi_f(x,a)g(a)-\Phi_g(x,a)f(a))}{g(x)g(a)}$ que es una función continua en $x=a$ por el hecho de que la suma, producto y cociente de funciones continua es continua y $\Phi_h\left(a,\, a\right) =$ $\dfrac{(\Phi_f(a,a)g(a)-\Phi_g(a,a)f(a))}{g(a)g(a)} = \dfrac{(\Phi_f(a,a)g(a)-\Phi_g(a,a)f(a))}{\left[g(a)\right]^2}$.

REGLA 7 Regla de potencias para enteros negativos

Si n es un entero negativo y $x \neq 0$, entonces la derivada en el sentido de Carathéodory de $f(x) = x^n$ en $x=a$ es $\Phi_f\left(x,\, a\right) = nx^{n-1}$ y $\Phi_f\left(a,\, a\right) = na^{n-1}$

Demostración:

Usaremos la regla del cociente para esta demostración. Si n es un entero negativo, entonces $n=-m$ es un entero positivo. En consecuencia:

$x^n = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, derivemos ahora la función $h(x)=\dfrac{1}{x^m}$ en el sentido de Carathéodory utilizando las reglas ya demostradas. Utilizando la regla del cociente se tiene:

$$\Phi_h(x,\ a)=\frac{(\Phi_f(x,a)g(a)-\Phi_g(x,a)f(a))}{g(x)g(a)}\text{, donde } f(x)=1 \text{ y } g(x)=x^m$$

Sustituyendo se tiene:

$$\Phi_h(x,\ a)=\frac{(0)g(a)-mx^{m-1}(1))}{g(x)g(a)}=\frac{-mx^{m-1}}{x^m a^m}\text{, por lo tanto } \Phi_h(a,\ a)=$$

$$\frac{-ma^{m-1}}{a^m a^m}=\frac{-ma^{m-1}}{a^{2m}}=-ma^{-m-1}=na^{n-1}.$$

y $\quad \Phi_h(x)=nx^{n-1}$

5.2.2.2.1 Derivadas de orden superior

Si $y=f(x)$ es una función $n-veces$ diferenciable, en a en el sentido de Carathéodory, entonces su derivada $\Phi_f(x)$ es $n-1\ veces$ diferenciable en a.

Ejemplo:

Hallar las primeras cuatro derivadas de la función $f(x)=x^3-3x^2+2$ en el sentido de Carathéodory

Solución

Utilizando las reglas de la derivada se tiene:

Primera derivada $\Phi_f(x) = 3x^2 - 6x$

Segunda derivada $\Phi^2{}_f\left(x\right) = \ \Phi_{f'}(x) = 6x - 6$

Tercera derivada $\Phi^3{}_f\left(x\right) = \ \Phi_{f''}(x) = 6$

Cuarta derivada $\Phi^4{}_f\left(x\right) = \ \Phi_{f'''}(x) = 0$.

5.2.2.2.2 Derivadas de las funciones trigonométricas

Muchos de los fenómenos de los que requerimos información muestran comportamientos periódicos ejemplo de estos son los campos electromagnéticos, ritmos cardiacos, mareas, climas, entre otros. Las derivadas de las funciones trigonométricas $f(x) = senx$, $g(x) = \cos x$, y $h(x) = \tan x$ juegan un papel clave en la descripción de cambios periódicos. En esta sección se mostrara como derivar en el sentido de Carathéodory las funciones trigonométricas básicas.

Derivada de la función $f(x) = senx$ en el sentido de Carathéodory.

Demostración:

Si f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_f\left(x,\, a\right)$ continua en a, que satisface la relación:

$f(x) - f(a) \ = \Phi_f(x,\, a)(x - a)$ Sustituyendo se tiene:

$sen(x) - sen(a) = \Phi_f(x, a)(x - a)$ la diferencia $sen(x) - sen(a)$ no se puede factorizar sino para $x \neq a$ y en este caso lo factorizamos como:

$$sen(x) - sen(a) = \frac{sen(x) - sen(a)}{(x - a)}(x - a)$$

$$= sen(x) - sen(a) = \Phi_f(x,a)(x-a).$$

Observando la expresión la función candidata para $\Phi_f\left(x,\ a\right)$ es:

$$\Phi_f\left(x,\ a\right) = \frac{sen(x) - sen(a)}{(x-a)}$$

Probemos que la función $\Phi_f\left(x,\ a\right) = \dfrac{sen(x) - sen(a)}{(x-a)}$ tiene una discontinuidad removible en $x = a$. En efecto utilizando una identidad trigonométrica la última expresión se convierte:

$$\frac{sen(x) - sen(a)}{(x-a)} = \frac{2sen\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]\cos\left[\dfrac{(x+a)}{2}\right]}{(x-a)} = \frac{sen\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]\cos\left[\dfrac{(x+a)}{2}\right]}{\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]}$$

$$= \frac{sen\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]\cos\left[\dfrac{(x+a)}{2}\right]}{\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]} = \frac{sen\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]}{\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]}\cos\left[\dfrac{(x+a)}{2}\right]$$

Recordando el teorema del emparedado para funciones continuas: Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo abierto que contiene a a, $f(x)$ y $h(x)$ son continuas en a, $f(a) = h(a)$ entonces $g(x)$ es continua en a y $f(a) = g(a) = h(a)$ y utilizando el hecho que cuando x está muy próximo a a la expresión $= \dfrac{sen\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]}{\left[\dfrac{(x-a)}{2}\right]}$ está muy próximo a 1, podemos reescribir la expresión:

$\dfrac{sen(x) - sen(a)}{(x-a)} = \cos\left[\dfrac{(x+a)}{2}\right]$ que es una función continua en $x = a$, por tanto

$$\Phi_f\left(x,\, a\right) = \frac{sen(x) - sen(a)}{(x-a)} = \cos\left[\frac{\left(x+a\right)}{2}\right] \text{ y } \Phi_f\left(a,\, a\right) = \cos\left[\frac{(a+a)}{2}\right] = \cos(a).$$

$$\Phi_f\left(x\right) = \cos(x)$$

Derivada de la función $f(x) = \cos x$ *en el sentido de Carathéodory.*

Demostración:

Si f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_f\left(x,\, a\right)$ continua en a, que satisface la relación:

$f(x) - f(a) = \Phi_f(x,\, a)(x-a)$ Sustituyendo se tiene:

$\cos(x) - \cos(a) = \Phi_f(x, a)(x-a)$ la diferencia $\cos(x) - \cos(a)$ no se puede factorizar sino para $x \neq a$ y en este caso lo factorizamos como:

$$\cos(x) - \cos(a) = \frac{\cos(x) - \cos(a)}{(x-a)}(x-a)$$

Observando la expresión la función candidata para $\Phi_f\left(x,\, a\right)$ es:

$$\Phi_f\left(x,\, a\right) = \frac{\cos(x) - \cos(a)}{(x-a)}$$

Probemos que la función $\Phi_f\left(x,\, a\right) = \dfrac{\cos(x) - \cos(a)}{(x-a)}$ tiene una discontinuidad removible en $x = a$. En efecto utilizando una identidad trigonométrica la última expresión se convierte:

$$\frac{\cos(x)-\cos(a)}{(x-a)}=\frac{-2sen\left[\frac{(x-a)}{2}\right]sen\left[\frac{(x+a)}{2}\right]}{(x-a)}=-\frac{sen\left[\frac{(x-a)}{2}\right]sen\left[\frac{(x+a)}{2}\right]}{\left[\frac{(x-a)}{2}\right]}$$

$$=-\frac{sen\left[\frac{(x-a)}{2}\right]sen\left[\frac{(x+a)}{2}\right]}{\left[\frac{(x-a)}{2}\right]}=-\frac{sen\left[\frac{(x-a)}{2}\right]}{\left[\frac{(x-a)}{2}\right]}sen\left[\frac{(x+a)}{2}\right]$$

Recordando el teorema del emparedado para funciones continuas: Si $f(x)\le g(x)\le h(x)$ para todo abierto que contiene a a y $f(x)$ y $h(x)$ son continuas en a entonces $g(x)$ es continua en a y utilizando el hecho que cuando x está muy cercano a a la expresión $=\frac{sen\left[\frac{(x-a)}{2}\right]}{\left[\frac{(x-a)}{2}\right]}$ está muy cercano a 1 podemos aproximar la expresión:

$\frac{\cos(x)-\cos(a)}{(x-a)}=-sen\left[\frac{(x+a)}{2}\right]$ que es una función continua en $x=a$, por tanto

$\Phi_f(x,\ a)=\frac{\cos(x)-\cos(a)}{(x-a)}=-sen\left[\frac{(x+a)}{2}\right]$ y $\Phi_f(a,\ a)=-\,sen\left[\frac{(a+a)}{2}\right]=-\,sen(a)$.

$\Phi_f(x)=-\,sen(x)$

Derivada de la función $h(x) = \tan x$ en el sentido de Carathéodory.

Demostración. Recordemos que : $h(x) = \tan x = \dfrac{senx}{\cos x}$ y utilizando la regla del cociente se tiene

$$\Phi_h(a,\ a) = \frac{(\Phi_f(a,a)g(a) - \Phi_g(a,a)f(a))}{g(a)g(a)} = \frac{(\Phi_f(a,a)g(a) - \Phi_g(a,a)f(a))}{[g(a)]^2}.$$

Donde $f(x) = senx$ y $g(x) = \cos x$, sustituyendo tenemos:

$$\frac{\cos(a)\cos(a) - (-sen(a))sen(a)}{[\cos(a)]^2} = \frac{\cos^2 a + sen^2 a}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)} = \sec^2(a).$$

$$\Phi_h(x) = \sec^2(x)$$

Teorema 4: Regla de la Cadena

Sea f definida en el intervalo abierto U, $a \in U$, y g definida en el intervalo abierto V, $f(U) \subset V$, con $f \in D_a(U, \Re)$ y $g \in D_{f(a)}(V, \Re)$. Entonces $g \circ f \in D_a(U, \Re)$ y

$$\Phi_{g \circ f} = (\Phi_g \circ f).\Phi_f$$

Demostración:

Si $h = g \circ f$ entonces

$$
\begin{aligned}
h(x) - h(a) &= g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big) \\
&= \Phi_g\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(a)\big) \\
&= \Phi_g\big(f(x)\big)\Phi_f(x)(x-a)
\end{aligned}
$$

f es continua en a por ser diferenciable en $x = a$, por hipótesis Φ_g es continua en $f(a)$ y Φ_f es continua en $x = a$ y por lo tanto $(\Phi_g \circ f).\Phi_f$ es continua en a.

Tenemos así que $g \circ f$ es continua en $x = a$ y que $\Phi_h = (\Phi_g \circ f).\Phi_f$

Ejemplo:

Un objeto se mueve a lo largo del eje x, de manera que la posición en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por la función $h(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determinar la velocidad del objeto como una función de t.

Solución:

Sabemos que la velocidad es la derivada de la función posición. En este caso, h es un función compuesta: $h = g \circ f$ donde $f(t) = t^2 + 1$ y $g(u) = \cos(u)$, utilizando el teorema de la regla de la cadena y derivando la función h en el sentido de Carathéodory tenemos:

$$
\begin{aligned}
\Phi_h(t) = \Phi_{g \circ f} &= (\Phi_g \circ f).\Phi_f \\
&= (-sen(u)) \circ (t^2 + 1)(2t) \\
&= -2t\,(sen(t^2 + 1)
\end{aligned}
$$

Diferenciación implícita

Casi todas las funciones que se han trabajado hasta este momento pueden escribirse expresando una variable en términos de otra variable por ejemplo: $f(x) = xsen(x)$ o en general $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como $x^2 + y^2 = 25$ o bien $x^3 + y^3 = 6xy$.

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de este tipo para y como una función

o como varias funciones de x, en otros casos es difícil y a veces imposible mediante el cálculo a mano hacer este tipo de ejercicios, obteniendo en la mayoría de situaciones expresiones muy complicadas. Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x con el fin de hallar la derivada en el sentido de Carathéodory de y. En lugar de ello, se puede aplicar el método de **derivación implícita.** Este consiste en derivar en el sentido de Carathéodory ambos miembros de la ecuación con respecto a x y, a continuación resolver la ecuación resultante para $\Phi_y(x)$. En los siguientes ejemplos se supone que la ecuación dada en algún subintervalo del dominio de las variables determina y implícitamente como una función derivable en el sentido de Carathéodory.

Ejemplo:

Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\Phi_y(x)$

Solución

Cuando se dice que f es definida implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ se tiene que la ecuación $x^2 + [f(x)]^2 = 25$ es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f. Ahora derivando en el sentido de Carathéodory ambos miembros de la ecuación,

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25$$

utilizando las reglas de derivación y el teorema de la regla de la cadena se tiene:

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25$$

$$2x + 2[f(x)](\Phi_y(x)) = 0$$

Despejando $\Phi_y(x)$ en la última ecuación:

$$\Phi_y(x) = \frac{-2x}{2f(x)} = -\frac{x}{f(x)}$$

Finalmente $\Phi_y(x) = -\dfrac{x}{y}$

Derivada de la función $f(x) = e^x$ en el sentido de Carathéodory.

Demostración:

Si f es diferenciable en a, en el sentido de Carathéodory existe una función $\Phi_f(x, a)$ continua en a, que satisface la relación:

$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x - a)$ Sustituyendo se tiene:

$$e^x - e^a = \Phi_f(x, a)(x - a)$$

Recordando que la función $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

$e^x - e^a = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) - \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots\right)$ restando y conmutando se tiene:

$$e^x - e^a = (x-a) + \frac{1}{2!}\left(x^2 - a^2\right) + \frac{1}{3!}\left(x^3 - a^3\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(x^n - a^n\right) + \ldots \text{ factorizando}$$

$$e^x - e^a = (x-a)\left(1 + \frac{1}{2!}(x+a) + \frac{1}{3!}\left(x^2 + ax + a^2\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}\right)\right).$$

Observando la expresión $e^x - e^a = \Phi_f(x, a)(x-a)$ la función candidata para $\Phi_f(x, a)$ es: $\Phi_f(x, a) = \left(1 + \frac{1}{2!}(x+a) + \frac{1}{3!}\left(x^2 + ax + a^2\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}\right)\right)$. que es un polinomio, por tanto es continua en $x = a$, luego la derivada de la función $f(x) = e^x$ en el sentido de Carathéodory es:

$$\Phi_f(x, a) = \left(1 + \frac{1}{2!}(x+a) + \frac{1}{3!}\left(x^2 + ax + a^2\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}\right)\right). \text{ y}$$

$$\Phi_f(a, a) = \left(1 + \frac{1}{2!}(a+a) + \frac{1}{3!}\left(a^2 + aa + a^2\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(a^{n-1} + a^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}\right)\right).$$

$$\Phi_f(a, a) = 1 + \frac{1}{2!}(2a) + \frac{1}{3!}(3a^2) + \ldots + \frac{1}{n!}(na^{n-1}) + \ldots$$

$$\Phi_f(a, a) = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots$$

$$\Phi_f(a,\,a)=\Phi_f(a)=e^a$$

$$\Phi_f(x)=e^x$$

Teorema 5: Teorema de la función Inversa:

Sea f una función continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto I que contiene a a y asumimos $\Phi_f(a)$ existe y es diferente de cero. Entonces $g = f^{-1}$ es diferenciable en el sentido de Carathéodory en $b = f(a)$ y $\Phi_g(b) = \frac{1}{(\Phi_f(a))}$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se tomara f estrictamente creciente en I, como f es diferenciable en el sentido de Caratheodory en a se satisface la siguiente expresión:

$f(x) - f(a) = \Phi_f(x,\,a)(x-a)$ Para todo $x \in I$ con $\Phi_f(a) \neq 0$

Sea U un intervalo abierto en el cual $g = f^{-1}$ está definida, talque $b \in U \subseteq f(I)$ y $b = f(a)$

$y - b = f(g(y)) - f(a) = \Phi_f(g(y))(g(y)-a)$ Para todo $y \in U$, como $\Phi_f(a)$ existe y es diferente de cero, despejando se tiene $(g(y)-a) = \frac{1}{\Phi_f(g(y))}(y-b)$ Para todo $y \in U$.

$(g(y)-g(b)) = \frac{1}{\Phi_f(g(y))}(y-b)$, de aquí que $\Phi_g(y) = \frac{1}{(\Phi_f(g(y)))}$ y por tanto cómo $\Phi_f(x)$ y $g(y)$ con continuas y la composición de funciones continuas es continua concluimos que $\Phi_g(b) = \frac{1}{(\Phi_f(a))}$ es continua.

Derivada de la función $f(x) = \ln\ x$ en el sentido de Carathéodory

Sea $g(x) = \ln x$ una función continua y estrictamente creciente, con dominio $(0, \infty)$ y rango $(-\infty, \infty)$ por lo tanto tiene una función inversa $f(x) = e^x$, la cual es diferenciable en el sentido de Carathéodory y diferente de cero para todo $x \in \Re$, por tanto calculemos la derivada de $g(x) = \ln x$ en esta vía, utilizando el teorema de la función inversa.

Veamos, por el teorema de la función inversa se tiene

$$\Phi_g(y) = \frac{1}{(\Phi_f(g(y)))}$$

donde se tiene que $\Phi_f(x) = e^x$ y $g(y) = \ln y$ por tanto

$$\Phi_g(y) = \frac{1}{(\Phi_f(g(y)))} = \frac{1}{e^{g(y)}} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

Sustituyendo la variable y por la variable x concluimos que la derivada de la función $g(x) = \ln x$ en el sentido de Carathéodory es:

$$\Phi_g(x) = \frac{1}{x}$$

Definición 2: Diferencial

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en el sentido de Carathéodory. La **diferencial**

dx es un variable independiente. La diferencial dy es

$$dy = \Phi_f(x)dx$$

A diferencia de la variable independiente dx, la variable dy siempre es un variable dependiente. Depende de x y dx. Si se da un valor específico a dx y x es un número particular en el dominio de la función f, entonces el valor numérico de dy esta determinado. Como $y = f(x)$ una función diferenciable en el sentido de Carathéodory se tiene para todo x perteneciente al dominio de la función f la siguiente igualdad

$$f(x+h) - f(x) = \Phi_f(x)((x+h)-x)$$

$$f(x+h) - f(x) = \Phi_f(x) \cdot h$$

$$dy = \Phi_f(x) \cdot h$$

Donde h es variable independiente dx.

Definición 3: Máximo absoluto, mínimo absoluto

Sea f una función con dominio D. Decimos que f tiene un valor máximo absoluto en D en un punto c si

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ en } D$$

y un valor mínimo absoluto en D en un punto c si

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ en } D$$

Definición 4: Máximo local, mínimo local

Una función f tiene un valor **máximo local** en un punto interior c de su dominio si

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ en algún intervalo abierto que contenga a } c.$$

Una función f tiene un valor **mínimo local** en un punto interior c de su dominio si

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ en algún intervalo abierto que contenga a } c.$$

Teorema 6: Teorema de la primera derivada para valores extremos locales

Sea f una función definida en un intervalo abierto I, si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto $c \in I$ y f es diferenciable en el sentido de Carathéodory en c, entonces $\Phi_f(c) = 0$

Demostración:

Supongamos que f tiene un mínimo relativo en $c \in I$ y f es diferenciable en el sentido de Carathéodory en c, por lo tanto se tiene la siguiente igualdad:

$$f(x) - f(c) = \Phi_f(x,c)(x-c) \quad \text{Para todo } x \in I$$

Sea $a \in I$ con $a < c$, con $f(a) \neq f(c)$, luego para $x = a$ en la igualdad anterior

$$f(a) - f(c) = \Phi_f(a,c)(a-c)$$

Como $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(a) - f(c) \geq 0$ al ser $a < c$, se tiene $a - c < 0$

Por lo tanto de la última igualdad se tiene que:

$$\Phi_f(a, c) \leq 0$$

Ahora, sea $b \in I$ con $b > c$, con $f(b) \neq f(c)$, luego para $x = b$ en la primera igualdad se tiene:

$$f(b) - f(c) = \Phi_f(b,c)(a-c)$$

Como $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(b) - f(c) \geq 0$ y $b - c > 0$ se tiene

$$\Phi_f(b, c) \geq 0$$

Por tanto $\Phi_f(a, c) \leq 0$ para todo $a \in I$, con $a < c$ y $\Phi_f(b, c) \geq 0$ para todo, $b \in I$ con $b > c$ cómo $\Phi_f(x,c)$ es continua en $x = c$, se concluye:

$$\Phi_f(c) = 0$$

De la misma forma se demuestra para el caso en el cual $x = c$ es un máximo relativo.

Definición 5: Punto crítico

Un punto interior del dominio de una función f donde $\Phi_f(x)$ es cero o no está definida es un **punto crítico** de f

Teorema 7: Teorema de Rolle

Supongamos que f es una función continúa en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el sentido de Carathéodory en todo punto de su interior (a, b), Si

$$f(a) = f(b),$$

Entonces existe al menos un número c en (a, b) talque

$$\Phi_f(c) = 0$$

Demostración:

Como f es una función continúa, alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en el intervalo cerrado $[a, b]$ y estos solo se pueden alcanzar en:

(a) en puntos interiores donde $\Phi_f(c)$ es cero,

(b) en puntos interiores donde $\Phi_f(x,c)$ no exista ,

(c) en los puntos extremos del dominio de la función. En este caso en a y b.

Por hipótesis f es diferenciable en el sentido de Carathéodory en todo punto de su interior (a, b) esto descarta la posibilidad **(b)**, reduciendo la solución solo a los puntos interiores donde $\Phi_f(c)$ es cero y a los extremos de la función en a y b.

Si el máximo y el mínimo se alcanzan en un punto interior, $c \in (a, b)$, de acuerdo con el teorema de valores extremos $\Phi_f(c) = 0$ y hemos encontrado el punto $c \in (a, b)$ que satisface el teorema de Rolle.

Por ultimo si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los extremos del intervalo, y como se tiene por hipótesis que f es una función continúa en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces f debe ser la función constante $f(x) = f(a) = f(b)$ y por la regla 1, $\Phi_f(c) = 0$ y el punto c que satisface el teorema de Rolle puede ser cualquier punto del intervalo (a, b).

Teorema 8: El Teorema del valor medio.

Supongamos que f es una función continúa en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el sentido de Carathéodory en todo punto de su interior (a, b). Entonces existe al menos un número c en (a, b) donde

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \Phi_f(c)$$

Demostración:

Sea $g(x)$ la recta secante de f que pasa por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$, por tanto la regla de asignación de la función g es

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La función g es una función lineal, la cual es derivable en el sentido de Carathéodory, ahora construyamos la función $h(x)$ como la función que le asigna a cualquier $x \in [a,b]$ la diferencia entre f y g, es decir,

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

la función h satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[a,b]$. Es continua en $[a, b]$ y diferenciable en el sentido de Carathéodory en (a, b), ya que por hipótesis f lo es y g es una función lineal. Además $h(a) = h(b) = 0$ por lo tanto para algún número c en (a, b) la derivada en el sentido de Carathéodory de la función h es cero, es decir, $\Phi_h(c) = 0$. Este punto es el que se quiere para satisfacer la tesis del teorema. Derivando en el sentido de Carathéodory a ambos lados de la última igualdad se tiene:

$$\Phi_h(x) = \Phi_f(x) - \Phi_g(x)$$

$$\Phi_h(x) = \Phi_f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Sustituyendo $x = c$ $\Phi_h(c) = \Phi_f(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ y por el teorema de Rolle se tiene

$0 = \Phi_f(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ Reordenado se tiene lo que se quería demostrar

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \Phi_f(c)$$

Teorema 9: Teorema de monotonía

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en el sentido de Carathéodory en (a, b)

(a) Si $\Phi_f(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.

(b) Si $\Phi_f(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración (a):

Sean x_1 y x_2 dos números cualquiera en (a, b), con $x_1 < x_2$ para probar que f es creciente se tiene que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$, por hipótesis se tiene que $\Phi_f(x) > 0$ y que f es diferenciable en el sentido de Carathéodory en $[x_1, x_2]$, por lo tanto f cumple las condiciones del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$. De modo que existe un $c \in (x_1, x_2)$ talque:

$$f(x_2) - f(x_1) = \Phi_f(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora bien por hipótesis $\Phi_f(c) > 0$ y $(x_2 - x_1) > 0$ por qué $x_1 < x_2$. El signo del lado derecho es positivo con lo cual $f(x_2) - f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < f(x_2)$, demostrando así que

f es creciente en $[a, b]$.

La parte (b) se demuestra de manera análoga.

Teorema 10: Prueba de la primera derivada para extremos locales.

Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f, y que es derivable en el sentido de Caratheodory en todo punto de algún intervalo que contiene a c, excepto posiblemente en el mismo c. Moviéndose a lo largo de c de izquierda a derecha.

(f) Si $\Phi_f(x)$ cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(g) Si $\Phi_f(x)$ cambia de positivo a negativo en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(h) Si $\Phi_f(x)$ no cambia signo en c (esto es, si $\Phi_f(x)$es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c) entonces f no tiene un extremo local en c

Demostración (a):

Por hipótesis se tiene que el signo de $\Phi_f(x)$ cambia de negativo a positivo en c, por lo tanto existen números a y b tales que $\Phi_f(x)<0$ para $x\in(a,c)$ y $\Phi_f(x)>0$ para $x\in(c,b)$. Si $x\in(a,c)$, como $\Phi_f(x)<0$ entonces f decrece y se tiene que $f(x)>f(c)$. Si $x\in(c,b)$, como $\Phi_f(x)>0$ entonces f crece y se tiene que $f(x)>f(c)$. Por lo tanto

$f(x)\geq f(c)$ para todo $x\in(a,b)$. Por definición f tiene un mínimo local en c.

Las partes (b) y (c) se demuestran de manera similar.

Definición 6: Concavidad

Se dice que la gráfica de una función f es **cóncava hacia arriba** sobre un intervalo $[a,b]$ si $\Phi_f(x)$ es una función creciente en $[a,b]$ y **cóncava hacia abajo** sobre un intervalo $[a,b]$ si $\Phi_f(x)$ es una función decreciente en $[a,b]$.

Definición 7: Punto de inflexión.

Un punto donde la gráfica de una función donde $\Phi_f(x)$ existe y la concavidad cambia es un **punto de inflexión**.

Teorema 11: Teorema de concavidad

Supongamos que $\Phi^2{}_f(x)$ es continua en un intervalo abierto que contiene a $x=c$

(a) Si $\Phi_f(c)=0$ y $\Phi^2{}_f(c)<0$, f tiene un máximo local en $x=c$.

(b) Si $\Phi_f(c) = 0$ y $\Phi^2{}_f(c) > 0$, f tiene un mínimo local en $x = c$.

Demostración (a):

Si $\Phi^2{}_f(c) < 0$, entonces $\Phi^2{}_f(x) < 0$ en algún intervalo abierto I que contenga el punto c, ya que $\Phi^2{}_f(x)$ es continua. Por lo tanto $\Phi_f(x)$ decrece en I. Como $\Phi_f(c) = 0$ el signo de $\Phi_f(x)$ cambia de positivo a negativo en c, de manera que, según la prueba de la primera derivada, f tiene un máximo local en $x = c$.

La parte (b) se demuestra de manera análoga.

5.2.3 Fase c. Las demandas cognitivas y problemas en la construcción personal de la ETC.

Reseñamos algunos de los problemas relacionados con la comprensión del concepto de derivada. Si entendemos la intuición como un modo de *conocimiento inmediato* que no requiere razonamiento, los hechos muestran que la creencia muy generalizada respecto a que resulta intuitiva una presentación de la derivada como el límite de las secantes ancladas en un punto, es totalmente falsa. Orton A (1977) demuestra que es muy difícil comprender el significado geométrico de la derivada de una función *f* en un punto, a partir de una sucesión de rectas secantes. Este resultado es consecuente con las investigaciones de Sierpinska (1985) respecto a obstáculos epistemológicos que se replican en la psicogénesis de los conceptos. Ella señala que en una investigación con grupos pequeños de estudiantes “buenos” para las matemáticas, se encontró en ellos cierta tendencia a evadir los procesos infinitos, a no aceptar el límite como el resultado de una nueva operación matemática sino sólo como aproximaciones, sin que el límite se alcance. Con semejantes limitaciones resulta inconcebible esperar que a partir de una presentación “intuitiva” de la derivada como el límite de la pendiente de rectas secantes ancladas en un punto, los estudiantes alcancen una comprensión conceptual y funcional del concepto.

En otras investigaciones tales como Badillo (2003) se reporta diferentes disfunciones respecto a las concepciones de “los macro objetos $f'(a)$, $f'(x)$ y la falta de tratamiento adecuado de las relaciones y diferencias entre éstos” en los textos de secundaria; así como incoherencias en las concepciones asociadas al concepto de derivada por parte de los profesores de secundaria en Colombia que se hacen manifiestas ”al reproducir los errores y dificultades en la comprensión de estos objetos cuando se enfrentan a la resolución y al diseño de tareas matemáticas”. Por otra parte, Patrick Thompson (1994), reporta que las dificultades de los estudiantes en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo “provienen de conceptos empobrecidos de razón de cambio y de imágenes pobremente desarrollada y pobremente coordinadas de covariación funcional y cantidades construidas multiplicativamente.

Respecto a la mediación de la tecnología David Tall (1986) sostiene que los desarrollos tecnológicos permiten potenciar y afectar los procesos cognitivos que intervienen en la construcción de los conceptos fundamentales del cálculo: “Un acercamiento gráfico al cálculo no es una «forma simple de introducción» para los estudiantes novatos, sino una forma que proporciona insight (comprensiones) de teoremas potentes que se formalizan más tarde en el análisis formal matemático”. En esta línea que investiga el papel de los sistemas de representación en la comprensión de los conceptos matemáticos Tall (2001), reporta sobre el papel del símbolo en el establecimiento de los “proceptos” y se hace alguna alusión al concepto de límite de sucesiones.

En resumen, y hablando en términos generales, la mayoría de investigaciones en torno al concepto de derivada, plantean que los estudiantes aprenden y aplican, con relativo éxito, las reglas de derivada, pero no comprenden la estructura matemática que subyace en tales cálculos y, como consecuencia, tienen dificultades para aplicar el concepto a problemas que no son rutinarios y en los que el concepto de derivada es necesario. Esta situación pone de manifiesto un *fenómeno didáctico*, asociado a la comprensión del concepto de derivada de Cauchy

Adicionalmente a los problemas relacionados con el aprendizaje de las matemáticas, que mencionamos en la sección anterior, es posible identificar en la definición de Cauchy una restricción, que podríamos llamar matemática. Esta restricción se pone en evidencia cuando se quiere extender el concepto de derivada a funciones reales de varias variables y a funciones de dominio y valor vectorial. Aunque las ideas básicas de la derivada se extienden a este tipo de funciones se hace necesario modificar la definición original y aparece la derivada de Frechet.

Definición: (*derivada de Frechet)* Sea $f:\Re^n \rightarrow \Re^m$. f es diferenciable en *a* si existe una transformación lineal $\lambda:\Re^n \rightarrow \Re^m$ tal que

$$\lim_{x\to a}\frac{\left\| f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\right\|}{\left\| x-a\right\|}=0$$

La *transformación lineal* λ se designa por λ=D*f*(*a*) y *se denomina* la diferencial de *f* en *a* o *derivada total de f en a.*

Cuando Delgado et alt (1992) comparan esta forma de introducir la derivada con la definición que Constantine Caratheodory (1954) presenta en su libro de variable compleja, comentan que la definición de Caratheodory se generaliza a funciones de varias variables de manera natural y además, Acosta & Delgado (1994), demuestran que la derivada de Frechet y Caratheodory son equivalentes. Estos dos hechos unidos a los resultados de la tesis doctoral de Delgado (1998) sobre la génesis del concepto de continuidad permiten pensar en la derivada de Caratheodory como una alternativa a la transposición didáctica clásica.

Estudio preparatorio del análisis didáctico. Está referido a la identificación y estudio de las demandas cognitivas sobresalientes que le plantea al alumno la construcción de la ETC y, por lo tanto, a la identificación y anticipación de posibles problemas y obstáculos cognitivos que pueda enfrentar el alumno para alcanzar el estado propuesto de formación. En primer lugar se focalizan procesos constructivos que debe realizar el sujeto, especialmente relacionados con la abstracción reflexiva: generalización, interiorización, inversión, coordinación de esquemas y, en especial, con las demandas relacionadas con la naturaleza dual de muchos conceptos matemáticos, que tiene como trasfondo la cosificación o comprensión conceptual como objeto. Interesa identificar, igualmente, demandas notables provenientes de la representación semiótica de conceptos y procesos matemáticos inherentes asociados con la ETC que se construye.

6 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En el desarrollo de esta tesis se estudió una alternativa distinta para acceder a una comprensión conceptual mucha más sólida del concepto de derivada, estudios como este que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, aportan elementos para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de estos. Es en este sentido que en este capítulo se presentan las conclusiones más relevantes encontradas en esta investigación con respecto a cada objetivo.

Con relación al objetivo especifico 1:

> ***Identificar en la historia, los problemas, las necesidades y obstáculos presentes en el surgimiento del concepto de Derivada y conceptos Asociados*.**

En el breve estudio histórico epistemológico realizado en el capítulo III, es evidente que uno de los problemas presentados en este primer periodo y al cual se le fue dando solución en los periodos siguientes, era saber que la geometría griega no se ocupaba de la variabilidad y por el contrario sólo se estudian figuras estáticas, presentando inevitablemente un conjunto de obstáculos epistemológicos y como consecuencia de estos, la lentitud para alcanzar la institucionalización de conceptos fundamentales del concepto de derivada, como es el caso de los conceptos de razón, función, límite y continuidad.

Es en este sentido que señalamos algunos de los obstáculos epistemológicos, el primero es el referente al paradigma filosófico que se tenía de las matemáticas en este periodo (Griegos), en el cual solo se validaban las concepciones que se alcanzaban por interpretación estrictamente lógica y por tanto admite lo que es comprobable por la experiencia, consolidando de esta forma el valioso método deductivo que le dio un soporte solido a la geometría de Euclides, en su libro los *Elementos*, geometría que sólo se limitó a la recta, la circunferencia y a las curvas trazadas con regla y compas.

Seguidamente las limitaciones, consecuencia del paradigma matemático que se movilizó en este periodo, constituyeron lo que Cantor denominó el “Horror al infinito” y que aquí expresa la eliminación del infinito actual y el rastro del obstáculo de la “inducción incompleta”. Se puede responsabilizar a tales obstáculos de impedir un surgimiento más temprano de conceptos matemáticos constitutivos del concepto de derivada como el concepto de límite, número real, convergencia, continuidad, que tiene su base precisamente en el concepto de infinito.

Como se presentó en el Capítulo III, en los periodos siguientes este paradigma se va debilitando hasta que en el periodo comprendido entre los siglos XVII-XVIII se rompe definitivamente con el paradigma Aristotélico y se da paso al estudio del movimiento y la variación, logrando eliminar paulatinamente las resistencias de admitir el álgebra como herramienta para generar nuevas curvas y establecer un diálogo fructífero entre el álgebra y la geometría, constituyéndose este complemento en un instrumento eficaz para el logro de relaciones abstractas por medio del razonamiento deductivo.

En lo referente a los obstáculos de los conceptos asociados presentes en el surgimiento del concepto de derivada como: curva, función, límite, continuidad, en el Capítulo III al final de cada periodo se presentan las conclusiones que dan cuenta de la evolución de cada uno de estos conceptos, ligadas a los matemáticos que se estudiaron por periodo.

Con relación al objetivo especifico 2:

> ***Caracterizar una estructura teórico conceptual, que se propone como fundamento matemático para una propuesta de enseñanza de la derivada basada en la definición de Caratheodory.***

Utilizando el concepto de Estructura Teórico Conceptual presentado en el marco teórico se logró caracterizar una estructura teórico conceptual, como fundamento matemático para una propuesta de enseñanza de la derivada basada en la definición de Carathéodory. Ver capitulo V

Con relación al objetivo especifico 3:

Caracterizar las demandas cognitivas que le plantea al alumno la construcción del concepto de derivada vía Carathéodory.

La construcción del concepto de derivada utilizando la definición de Carathéodory:

"f es diferenciable en x=a si existe una función Φ ***continua en a y tal que*** $f(x)-f(a)=\Phi(x)\left(x-a\right)$. Al valor de Φ en a lo notamos $f'(a)=\Phi(a)$ (la derivada de f calculada en a".

Pone al estudiante frente a un conjunto de demandas cognitivas que tienen su partida con las demandas cognitivas previas asociadas a la construcción solida del concepto de continuidad de una función en un punto x=a, concepto que es transversal en esta definición y obviamente necesita de conocimientos soporte como el de número real, razón, función numérica.

En particular se le demanda al estudiante reconocer los conceptos soporte, como el de variable, función, continuidad y los roles que ellos juegan para construir el nuevo concepto, es decir, dar significado a los distintos términos en la igualdad involucrada, e identificar la secuencia operativa que resulta después de efectuar cierto proceso que generalmente se apoya en una factorización, para así dar cuenta de la función continua Φ buscada. Por otro lado exige reconocer y discriminar los dos conceptos, productos de la articulación de los conceptos soporte, *derivada de Carathéodory en un punto* $f'(a)=\Phi(a)$ *y la función derivada* $\Phi(x)$ es decir, reconocer el primer producto como un número y el segundo como una función.

Seguidamente interiorizar la secuencia operativa de la definición, los productos involucrados en el desarrollo de solución de una situación y finalmente encapsular tales productos en los símbolos $f'(x)=\Phi(x)$ y $f'(a)=\Phi(a)$ o equivalentes, articuladamente con los términos función derivada y derivada en un punto.

Por lo tanto, la comprensión de estos conceptos involucrados en la solución de la situación exige inevitablemente que el aprendiz sea consciente de las demandas cognitivas exigidas en su construcción y no se quede solamente con la parte operativa.

Con relación al objetivo especifico 4:

> ***"Identificar algunos de los pro y contras que se pueden anticipar de una propuestas de enseñanza de la derivada vía Carathéodory desde las dimensiones, Matemática, Cognitiva y Didáctica"***

Una gran ventaja de la definición de la derivada vía Carathéodory, como se mostró en el capítulo 4, aparece a la hora de obtener los resultados clásicos de las funciones derivables. Las demostraciones del algebra de las derivadas utilizando la definición de Cauchy son tediosas y rutinarias, con la definición de Carathéodory se simplifican los cálculos privilegiando la parte algebraica. Acosta & Delgado (1994), demuestran que la definición de "*derivada de Carathéodory*" es equivalente a la definición de Frechet y este hecho permite introducir el concepto de derivada vía *Carathéodory* con lo que esta presentación evitaría el tránsito por varias definiciones: una para funciones de una variable real y luego, como paso obligado, construir otra definición para funciones escalares y otra para campos vectoriales.

Como se presentó en el capítulo 4 la interpretación de la definición de Carathéodory es más cercana a la intuición de los estudiantes y es más económica (respecto al número de conceptos que es necesario vincular, tanto en los procesos de cálculo como en los procesos de razonamiento deductivo en las demostraciones de los teoremas) puesto que ella no requiere de paso al límite. Como vimos se trata de construir una función Φ, lo cual sólo demanda factorizar la expresión $f(x) - f(a)$ en términos de la diferencia $x-a$ y observar si el factor (el candidato para definir a Φ) que acompaña a $(x-a)$ es una función continua en el punto a de R^n. Si tal es el caso Φ evaluada en a se llama la derivada de f en a.

Cuando el concepto de derivada se fundamenta en la continuidad el álgebra de las derivadas (derivada de la suma producto y cociente de funciones) aparece de manera natural y esto es particularmente cierto en el caso de la regla de la cadena (c.f. Delgado et al, 1993) en la que la regla $\Phi_g(f(a))\Phi_f(a)$ surge directamente de la demostración que, por lo demás, es una construcción directa aplicando el concepto de función compuesta ($h=g\circ f$), la hipótesis de la diferenciabilidad (de f en a, de g en $f(a)$), la continuidad de funciones compuesta y del producto de funciones para concluir que la función $\Phi_g(f(x))\Phi_f(x)$ que es factor de (x–a) es continua en a y por lo tanto es la derivada de h en a.

Como se puede observar, el concepto central que permite avanzar en la demostración es el de continuidad de una función en un punto, junto con los teoremas asociados a este concepto: el teorema que relaciona diferenciabilidad con continuidad permite reconocer la continuidad de f en a y g en $f(a)$, este resultado se aplica (usando el teorema de continuidad de la función compuesta) al producto de las funciones $\Phi_g(f(x))\Phi_f(x)$ y se obtiene el resultado buscado.

No obstante la complejidad conceptual que demanda la comprensión del concepto de continuidad los resultados se obtienen de una manera más natural si se compara con la demostración vía límite de los mismos teoremas y esto es especialmente cierto en el caso de la regla de la cadena (c.f. Tom Apóstol (1988), p. 214-215)

La Derivada de Caratheodory para funciones vectoriales

Definición: Sea f una función de $\Re^n$ en $\Re^m$ y a un punto en $\Re^n$, f es diferenciable en a en el sentido de Carathéodory si existe:

$\phi_f : \Re^n \to M_{mxn}$ Continua en a,

Tal que:

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a)$$

Si f una función de $\Re^n$ en $\Re^m$ y a un punto en $\Re^n$.se puede interpretar la definición según Carathéodory así: identificando $f(x) - f(a)$ como un vector columna de $\Re^m$ y

$(\ x-a\ )$ un vector columna de $\Re^{n}$.por lo tanto $\phi_f(x)$ se puede interpretar como una matriz $n\,x\,m$ para que el producto de matrices y la igualdad tenga sentido.

<u>Teorema:</u>

Una función es diferenciable según Frechet si y solo si es diferenciable según Caratheodory

<u>Demostración</u>

Demostremos primero: Si f es derivable en el sentido de Caratheodory entonces f es derivable en el sentido de Frechet

f es diferenciable en a en el sentido de Caratheodory si existe:

$\phi_f : \Re^n \rightarrow M_{mxn}$ Continua en a,

Tal que:

$f(x) - f(a) = \phi_f\ (x)(x-a)$

Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad:

$f(x) - f(a) = \phi_f\ (a)(x-a)$

Si f es diferenciable en a en el sentido de Frechet existe una transformación $\lambda\ ;\ \Re^n \rightarrow \Re^m$ tal que,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\| f(x) - f(a) - \lambda(x-a) \|}{\| x-a \|} = 0$$

Supongamos que $\lambda = \phi(a)$ y probemos el límite que aparece arriba:

$$\frac{\| f(x) - f(a) - \lambda(x-a) \|}{\| x-a \|} = \frac{\| f(x) - f(a) - \phi(a)(x-a) \|}{\| x-a \|} = \frac{\| (\phi(x) - \phi(a))(x-a) \|}{\| x-a \|}$$

$$\frac{\|(\phi(x)-\phi(a))(x-a)\|}{\|x-a\|} \leq \|(\phi(x)-\phi(a))\| \leq \varepsilon$$

Por la continuidad de ϕ en a

Probemos ahora que si f es derivable en el sentido de Frechet entonces f es derivable en el sentido de Caratheodory.

Si f es diferenciable en a en el sentido de Frechet existe una transformación $\lambda ; \Re^n \to \Re^m$ tal que,

$$\lim_{x \to a} \frac{\| f(x) - f(a) - \lambda(x-a)\|}{\| x-a\|} = 0$$

Debemos encontrar $\phi_f : \Re^n \to M_{mxn}$ Continua en a,

Tal que:

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a)$$

Restando a ambos lados $\lambda(x-a)$ se tiene:

$$f(x) - f(a) - \lambda(x-a) = \phi_f(x)(x-a) - \lambda(x-a)$$

Sea: $L(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$ en la última ecuación se tiene:

$L(x) = \phi_f(x)(x-a) - \lambda(x-a)$ Factorizando

$$L(x) = (\phi_f(x) - \lambda)(x-a)$$

$L(x)$ es un vector de orden $mx1$ y $(x-a)$ es un vector de orden $nx1$ por lo tanto $(x-a)^t$ es un vector $1xn$, multiplicando en ambos lados por $(x-a)^t$ de la última igualdad en ambos lados se obtiene una matriz de orden mxn :

$$L(x)(x-a)^t = (\phi_f(x) - \lambda)(x-a)(x-a)^t$$

$$L(x)(x-a)^t = (\phi_f(x)-\lambda)\|(x-a)\|^2$$

$$\frac{1}{\|(x-a)\|^2} L(x)(x-a)^t = (\phi_f(x)-\lambda)$$

Aplicando a ambos lados $(x-a)$ se tiene:

$$\frac{1}{\|(x-a)\|^2} L(x)(x-a)^t (x-a) = (\phi_f(x)-\lambda)(x-a)$$

Despejando $\phi_f(x)$ se tiene:

$$\phi_f(x) = \frac{1}{\|(x-a)\|^2} L(x)(x-a)^t (x-a) + \lambda$$

Concluimos:

$$\phi_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|(x-a)\|^2} L(x)(x-a)^t (x-a) + \lambda., & x \neq a \\ \lambda & x = a \end{cases}$$

Por la construcción de $\phi_f(x)$ es claro que satisface la igualdad:

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a)$$

Probemos que $\phi_f(x)$ es continua en $x = a$

$$\|\phi(x)-\phi(a)\| \leq \frac{\|f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\|}{\|(x-a)\|} \leq \varepsilon$$

Por lo tanto $\phi_f(x)$ es continua en $x = a$

Ejemplo:

Dada la siguiente función
$$\begin{aligned} f:\ \Re^2 &\to \Re^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\to f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hallar la derivada de f en el sentido de Caratheodory en el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Construimos $\phi_f(x)$ que satisfaga la siguiente igualdad $f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a)$

$$\begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi_f(x)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2y - 1 \end{pmatrix} = \phi_f(x)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ Veamos que

$\begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2y - 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 & y+1 \\ xy + y^2 & y+1-xy \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ por lo tanto:

$\phi_f(x) = \begin{bmatrix} y^2 & y+1 \\ xy + y^2 & y+1-xy \end{bmatrix}$ Donde todas sus componentes son continuas y

$$\phi_f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la siguiente función
$$\begin{aligned} f:\ \Re^2 &\to \Re \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\to f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy \end{aligned}$$

Hallar la derivada de f en el sentido de Carathéodory en el punto $a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Solución:

Construimos $\phi_f(x)$ que satisfaga la siguiente igualdad

$$f(x) - f(a) = \phi_f\,(x)(x-a)$$

$xy - ab = \phi_f(x)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$, tenemos que $\phi_f(x) = (b,\ x)$ y $\varphi_f(x) = (y,\ a)$ son dos funciones diferentes que satisfacen la igualdad característica, pero observemos que:

$$\phi_f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \varphi_f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Demostremos en general el teorema de unicidad.

Teorema de Unicidad:

Si ϕ y ψ son dos funciones que satisfacen las condiciones dadas en la anterior definición para f en a, entonces:

$$\phi(a) = \psi(a)$$

Demostración:

Supongamos que ϕ y ψ son dos funciones tales que $\phi(a) = f'(a)$ y $\psi(a) = f'(a)$

Derivada de f en el sentido de Carathéodory en a probemos que $\phi(a) = \psi(a)$

Sea $\eta(x) = \phi(x) - \psi(x)$ y mostremos que $\eta(a) = 0$

$$f(x) - f(a) = \phi_f\,(x)(x-a)$$

$$f(x) - f(a) = \psi_f\,(x)(x-a)$$

Restando las dos ecuaciones anteriores se tiene:

$$\eta(x)(x-a) = 0$$

$\|\eta(a)(x-a)\| = \|(\eta(a) - \eta(x))(x-a)\| \le \|\eta(a) - \eta(x)\|\|x-a\|$ de donde se tiene:

$$\left\| \eta(a)\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}\right) \right\| \leq \|\eta(a) - \eta(x)\| \leq \varepsilon$$

Por la continuidad de η en a se tiene $\eta(a) = 0$ y concluimos que $\phi(a) = \psi(a)$.

Teorema:

Sea f una función de valor real definida sobre un conjunto abierto $U \subseteq \Re^n$.

Si f es diferenciable en $x_o \in U$ y $f(x_o)$ es un valor extremo, entonces:

$$Df(x_o) = 0$$

Teorema de la función Inversa:

Sea f Continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto I que contiene a

c y asumimos que $f'(c)$ existe y es diferente de cero. Entonces $g = f^{-1}$ es diferenciable en $d = f(c)$ y $g'(d) = [f'(c)]^{-1}$

Teorema Punto Crítico:

Sea f definida en un intervalo abierto I que contiene a a. Si $f(a)$ es un valor extremo,

entonces a es un punto crítico es decir: $f'(a) = 0$ o $f'(a)$ no existe.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, E. y Delgado, C. (1994). Fréchet vs. Carathéodory. *American Mathematical Monthly*, Vol 101, Nº 4, pp. 332-338

Álvarez, G. (2011). *Estados de comprensión en estudiantes de ingeniería de la Pontificia Universidad Javeriana Cali asociados con el concepto de derivada*. Tesis de maestría. Univesidad del Valle. Cali, Colombia.

Álvarez, J. & Delgado, C. (1999). Línea de investigación de formación matemática en contextos curriculares: presentación. *Documento interno de trabajo. Universidad del Valle*. Cali. Colombia. pp. 1-19.

Álvarez, J. (1998). Mapas conceptuales matemáticos. *Documento de trabajo*. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Álvarez, J. (2007) Consideraciones metodológicas en torno a la aplicación del concepto de estructura teórico conceptual. *Documento de trabajo*. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Álvarez, J. (2009). *Estructuras teórico conceptuales y comprensión conceptual en matemáticas*. *Documento de trabajo*. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Artigue, M. (1990) Epistemología y Didáctica. *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol 19, N 23, pp. 241-286, 1990.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Gómez, P. (ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, pp. 97-140. Empresa docente & Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá. Colombia.

Artigue, M. (1999) The teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary. Research in Education. *Notices American. Mathematical. Society*. N 46. pp 1377-1385. Traducción César Delgado G.

Artigue, M. (2003) ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática de Venezuela*. Vol. X, No. 2.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematics Behavior*. Vol. 16, pp. 399-430.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Beth, E. & Piaget, J., (l961), *Epistémologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre logique formelle et le pensée réelle* Presses Universitaires de France. París Versión castellana: *Epistemología matemática y psicología.* Editorial Crítica. Barcelona. (Edición consultada 1980).

Boyer, C. (2001) *Historia de la Matemática*. Título original *A History of Mathematics*. Traducido por John Wiley y Sons, Inc. Ed, cast.: Alianza Editorial, S. A., Madrid.

Brousseau G. (1983). Les Obstacles Epistemologiques et les Problemes en Mathematiques, *Recherches en didactique des mathematiques.* Vol.4, N° 2, pp. 165-198.El texto original fue presentado por. Guy Brousseau en la XXVIII reunión del CIEAEM: «Le problematic et l'ensegnement des mathématiques». Lovain la neuve 5-6 août 1976. Versión castellana: Obstáculos epistemológicos y problemas en matemática. César Delgado, G.., Documento de uso académico. *Universidad del Valle,* 2001. Cali, Colombia.

Brousseau G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflicts socio-cognitifs et ingéniérie didactique. En: Bodnarz N., Garnier C. (editores) (1989). *Les obstacles épistémologiques et le conflit socio-cognitif. Construction des savoirs (obstacles et* *conflits)*. Coloquio internacional CIRADE, Universidad de Québec, Montreal. pp. 277-285.

Brousseau G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, En: Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, y Virginia Warfield (eds. y trad.). Kluwer Academic Publishers. London.

Brousseau, G. (1990). *Le Contrat Didactique: Le Milieu.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 9, Nº 3, pp. 309-336. Traducción al castellano de César Delgado, G. *El contrato didáctico: El medio*. Documento de uso académico. *Universidad del Valle,* 2001. Cali, Colombia,

Campaña, G. (2009). *Esquemas conceptuales relacionados con el teorema fundamental del cálculo en estudiantes de ingenieria de la Pontificia Universidad Javeriana.* Tesis de Maestría. Universidad del valle, Cali, Colombia

Cantoral, R. (1988). Historia del Cálculo y su Enseñanza: del trazado de tangentes al concepto de derivada. *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Guatemala C. A.

Carathéodory, C. (1954). *Theory of functions of complex variable*, Vol.I, Chelsea, New York,

Cauchy, A-L. (1821). *Course d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, I.re partie, Analyse Algébrique,* Paris (1821). Traducción al castellano, *Curso de Análisis,* 1994. Colección MATHEMA. México.

Cordero, F. (2007) El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemátiva Educativa*, noviembre, 2005, Vol. 8, número 003. México.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Delgado, C. & Álvarez, J. (2002). The Tall-Vinner Problem. An Operative Reformulation. *Proceedings of 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 1, pp. 261-269.

Delgado, C. & Azcárate, C. (1996). Study on the evolution of graduate students' concept images while learning the notions of limit and continuity. *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, Valencia (España). 289-296

Delgado, C. (1998). *Estudio Microgenético de Esquemas Conceptuales Asociados a los Conceptos de Continuidad y Límite en Universitarios de Primer Curso*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Delgado, C. (2003). Comprensión y pensamiento matemático avanzado. ~~En~~ *Matemática Educativa: fundamentos de la matemática Universitaria*. Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería, pp. 11-30. Febrero de 2003. Bogotá.

Delgado, C. (2010). Bases epistemológicas y didácticas para la enseñanza de conceptos matemáticos. En M. Trujillo, N. Castro, & C. Delgado, *El concepto de función y la teoría de situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras.* Bogotá, Colombia: Ediciones Unilasalle, pp.11-71).

Dolores, C. (1989). Algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada. En F., Hitt, O., Figueras, L., Radford y E., Bonilla (Eds.), *Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. San José, Costa Rica. pp. 391–396

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. Capítulo 13 del libro *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Fernando Hitt (Editor). Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 257-272. México D. F.

Dubinsky, E. (1992). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinikng. *Advanced Mathematical Thinking.* Tall, D. (Ed.), Kluwer Academic Publisher. London.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Penssée Humaine. Registres sémiótiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang S.A. ESE. París. Traducción al castellano: *Semiosis y Pensamiento Humano*. *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, 1999. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Espejo. V. & Sarmiento, B. (2001). *Evolución histórica del tratamiento didáctico de la serie de Taylor en los libros de texto universitarios: 1940-1995.* Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Santafé de Bogotá D.C.

Grattan-Guiness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910, una introducción histórica*. Alianza Editorial. Madrid. España.

Hoyles, C., & Noss, R. (1986). *Scaling a mountain: a study of the use, in LOGO environmente.* European Journal of Psychology of Education. Vol. 1. No. 2.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I.* Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1992, 1994.

Kuhn, T. S. (1962). *The Structure of the scientific revolutions*. University of Chicago Press.Versión castellana: *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. Madrid: Fondo de Cultura Económica, 1994.

Llorens, J. y Santonja, F. (1997) Una interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. Divulgaciones Matemáticas v. 5, No. 1/2. 61-76. Departamento de Matemática aplicada. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. España.

Novak, J., & Gowin, D. (1986). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona. España. Ediciones Martínez Roca.

Orton, A. (1977). Chords, secants, tangents and elementary calculus. *Mathematics Teaching.* N°. 78, pp. 48-49.

Orton, A. (1980) An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. *Cognitive Development Research in Science and Mathematics*. University of Leeds. Pp 201-215.

Piaget, J. & Garcia, R., (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Siglo XXI. México.

Piaget, J. (1966). La psychologie, les relations interdisciplinaires et le système des sciences. *Bulletin de psychologie,* 20, No. 254, pp. 242-254. (Publicado también en: *18e Congrès international de psychologie*, le 4-11 août, 1966. Moscou: Naouka, 1969, pp. 123-151.).Traducción del francés al castellano: Francisco J. Fernández Buey, pp- 1-26.

Piaget, J., (1975) *L'équilibration des structures cognitives : problème central du développement.* Presses universitaires de France. (EEG 33). Paris.Versión castellana: *La Equilibración de las Estructuras Cognitivas: problema central del desarrollo*. Siglo XXI. 2000. Madrid

Piaget, J., 1959. *La formation du symbole chez l'enfant: Imitation, jeu et reve*. Editions Delachaux & Niestle, S.A., Neuchatel. Traducción al castellano: *La formación del símbolo en el niño*. Fondo de cultura económica. México, 1994.

Schapiro, E. (1999). The real calculus vs. what you learned. *21st Century Science & Technology*. Vol. 12, N° 3 , pp. 30-40. Traducción al castellano de César Delgado, G. El cálculo real vs. lo que usted aprendió. Documento de uso académico. *Universidad del Valle*, 2000. Cali. Colombia.

Sfard, A. (1991). *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*. Educational Studies in Mathematics. Vol 22, pp. 1-32. Kluwer Academic Publisher. Traducción al español: Delgado C., Universidad del Valle, documento interno, 1993.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Epistemologiques Relatifs a la Notion de límite. *Recherches en Didactiques des Mathématique.* Vol. 6. No. 1, pp. 5-67.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function , En E. DUBINSKI and G.HAREL (eds.), *The Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, pp. 25-58. Mathematical Association of America, Washington, DC. Traducción al castellano: Sobre la comprensión de la noción de función. Delgado C., Universidad del Valle, documento interno, 1999.

Skemp, R. (1976) Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, Diciembre, 1976.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching.* **77**, 20-26. Publicado en: *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A Tribute to Richard Skemp*. Editado por: David Tall y Michael Thomas, 2002. Post Pressed Flaxton. Australia, pp. 1-16.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12** (2), pp. 151-169. Traducción al castellano de César Delgado, G. Concepto Imagen y Definición de Concepto en matemáticas. Con Particular Referencia a Límites y a Continuidad. Documento de uso académico. *Universidad del Valle*, 1994. Cali. Colombia.

Tall, D. Giraldo, V. Carvalho, L. (2002). Using theoretical-computational conflicts to enrich the concept image of derivative. In Pope, S. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics.* 22(3) pp. 37-42

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with reference particular to limit and continuity*. Centro de investigación en Educación Matemática. Universidad de Warwick. Centro de Enseñanza de la ciencia. Universidad de Hebrew.

Tall, D., & Vinner, S. (1995). *La problemática Tall - Vinner* (Alvarez, J. y Delgado, C. 2001). *Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus* (Thompson, P. Educational studies in mathematics. Vol. 26, 1994, pp 229-274).

Thomas, (2005) CÁLCULO una variable. Undécima edición. Editorial PEARSON Addison Wesley.

Thompson, P. (2004) IMÁGENES DE RAZÓN Y COMPRENSIÓN OPERACIONAL DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE CÁLCULO. En *Educational Studies in Mathematics* 26: 229—274, 1994. Traducción Cesar Delgado.

Toulmin, S. (1972). *Human understanding. The colective use and evolutions of concepts.* Pricenton Universite Press. Oxford. Versión castellana: *La comprensión humana, el uso colectivo y la evolución de los conceptos.* Alianza Editorial. Madrid (1977).

Turégano, M. (1998) Del Área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), 233-249.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technolog*y. Vol. 14, pp. 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (Edit.) *Advanced Mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers.